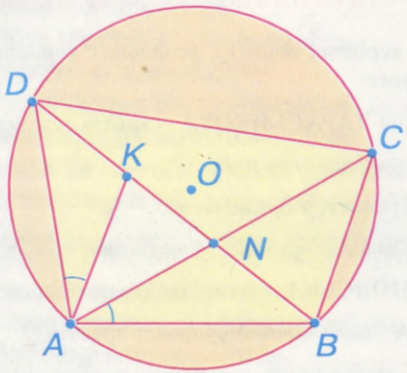
M. I. Burda, N. A. Taraszenkova

MÉRTAN

Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek 8. osztálya számára

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma



Ez a tankönyv a 2007. évi összukrajnai tankönyvpályázat nyertese, amelyet Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma hirdetett meg a tizenkétosztályos iskolák tankönyvellátása céljából

ЛЬВІВ
„СВІТ"
2008

УДК 514 (075)
ББК 22.151я721
Б91

Перекладано з видання:
Бурда М. І. Геометрія: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К.: Зодіак-ЕКО, 2008

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (наказ від 17 березня 2008 р., № 179)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій КУЗНЕЦОВ – керівник проекту, розробник концепцій: дизайну, художнього оформлення;

Михайло БУРДА, Ніна ТАРАСЕНКОВА – автори тексту і методичного апарату;

Олег КОСТЕНКО – координатор проекту;

Олена ПОПОВИЧ – редактор-організатор;

Андрій ВІКСЕНКО – макет, художнє оформлення;

Валентина МАКСИМОВСЬКА – організатор виробничого процесу;

Галина КУЗНЄЦОВА – економічний супровід проекту;

Роман КОСТЕНКО – маркетингові дослідження підручника;

Андрій КУЗНЕЦОВ – моніторинг апробації підручника

Бурда М. І.
Б91 Геометрія: Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів із навчанням угорською мовою / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова // Переклад угорською мовою О. П. Генцію, Ю. І. Кулін. – Львів.: Світ, 2008. – 240 с.: іл.
ISBN 978-966-603-586-1

УДК 514 (075)
ББК 22. 151я 721

© М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, 2008
© Видавництво «Зодіак-ЕКО», 2008
© Художнє оформлення. А. М. Віксенко, 2008
© Концепції: дизайну, художнього формлення. Ю. Б. Кузнецов, 2008
© О. П. Генці, Ю. І. Кулін, переклад, 2008

ISBN 978-966-603-586-1 (угор.)
ISBN 978-966-7090-59-3 (укр.)

TARTALOM

Kedves tanulók! 4

1. fejezet **NÉGYSZÖGEK**



1.§. A négyszög és elemei 8
2.§. A paralelogramma és tulajdonságai 15
3.§. A paralelogramma ismertetőjelei 22
4.§. A téglalap 30
5.§. A rombusz. A négyzet 37
6.§. Thalész tétele. A háromszög középvonala 45
7.§. A trapéz 52
8.§. Középponti és kerületi szögek 61
9.§. Beírt és körülírt négyszögek 69

2. fejezet **A HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGA**



10.§. Hasonló háromszögek 80
11.§. Thalész tételének általánosítása. Párhuzamos szelők tétele 88
12.§. A háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele 96
13.§. A háromszögek hasonlóságának második és harmadik ismertetőjele 103
14.§. A háromszögek hasonlóságának alkalmazása 111

3. fejezet **SOKSZÖGEK. A SOKSZÖGEK TERÜLETE**



15.§. A sokszög és tulajdonságai 126
16.§. A terület fogalma. A téglalap területe 132
17.§. A paralelogramma területe 141
18.§. A háromszög területe 148
19.§. A trapéz területe 155

4. fejezet **A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK MEGOLDÁSA**



20.§. Pitagorasz tétele. Merőleges és ferde 164
21.§. A derékszögű háromszög hegyesszögének szinusza, koszinusza és tangense 174
22.§. A derékszögű háromszög oldalai és szögei közötti összefüggés 180
23.§. Néhány szög szinuszának, koszinuszának és tangensének meghatározása 186
24.§. A derékszögű háromszögek megoldása 193

A TANANYAG ISMÉTLÉSE 203
A 7. OSZTÁLYBAN TANULTAK ÖSSZEFOGLALÁSA 213
FELELETEK ÉS ÚTMUTATÁSOK 217
MELLÉKLETEK 236
TÁRGYMUTATÓ 238

Kedves Tanulók!

A 7. osztályban megismerkedtetek a mellék- és csúcsszögek, a párhuzamos és merőleges egyenesek, a háromszögek, a körvonal elemeinek tulajdonságaival; megtanultátok alkalmazni a háromszögek egybevágóságának ismertetőjeleit a számítási és szerkesztési feladatok megoldásánál.

A most következő tanévben elmélyítitek és kiszélesítitek mértani ismereteiteket. Megismeritek a négyszögek és a hasonló háromszögek tulajdonságait és ismertetőjeleit, a terület tulajdonságainak ismerete alapján megtanuljátok kiszámítani a háromszögek és négyszögek területét. A derékszögű háromszögek oldalai és szögei kiszámításának új módszereit ismeritek meg, begyakoroljátok ezen módszerek alkalmazását a gyakorlatban.

Hogyan tanuljuk sikeresen a mértant a tankönyv segítségével? Az egész ismeretanyag négy fejezetre van osztva, a fejezetek pedig paragrafusokra. Mindegyik paragrafusban van elméleti anyag és vannak feladatok. Az elméletet tanulva különös figyelmet fordítsatok a bekeretezett szövegre. A bekeretezett szövegrészek tartalmazzák a legfontosabb meghatározásokat és a mértani alakzatok legfontosabb tulajdonságait. Ezeket szükséges érteni, meg kell jegyezni, és tudni kell alkalmazni a feladatok megoldásánál. Az egyéb fontos információk **félkövér** betűkkel vannak nyomtatva. *Dőlt betűsek* a fogalmak tudományos nevei.

A paragrafus anyaga elsajátításának ellenőrzésére, ismétlésére szolgálnak a paragrafus végén található *Emlékezz a fontosakra!* rovat kérdései. Mindegyik fejezet után ellenőrző kérdések és tesztfeladatok vannak, melyekkel ellenőrizhető az anyag elsajátításának mértéke.

Ismerkedjetek a feladatok megoldásához nyújtott tanácsokkal, a megoldott típusfeladatokkal.

A tankönyv feladatai négy nehézségi fokozatba sorolhatók. A legegyszerűbb feladatok számai vonalkával (') vannak jelölve. Ezek előkészítő feladatok azoknak, akik nem biztosak benne, hogy jól

értették meg az elméleti anyagot. A köröcskével (°) jelölt feladatok közepes nehézségűek. Ezeket mindenkinek tudnia kell megoldani, hogy tovább tudjon haladni a mértan tanulásában. A megfelelő nehézségű feladatok számozása jelöletlen. Ezeket sikeresen megoldva biztosak lehettek benne, hogy a tananyagot jól elsajátítottátok. Csillaggal (*) vannak jelölve a nehezebb feladatok. Ha ezeket a feladatokat nem tudjátok azonnal megoldani, ne keseredjetek el, legyetek türelmesek és kitartóak. A bonyolult feladatok megoldása öröm és sikerélmény lesz számotokra.

A félkövér betűkkel kiemelt feladatokat megoldva véssétek emlékezetetekbe azok megfogalmazását. Ezek a mértani állítások más feladatok megoldásánál is alkalmazhatók.

A *Tudjatok többet!* rovatot használva elmélyíthetitek ismereteiteket.

A tankönyvben speciális eligazító ábrák (piktogramok) találhatók. Ezek segítenek jobban tájékozódni a tananyagban.


Olvassátok el!


Döntsétek el!


Jegyezzétek meg!


Hogy írjuk be?


Mit tegyünk?


Típusfeladat

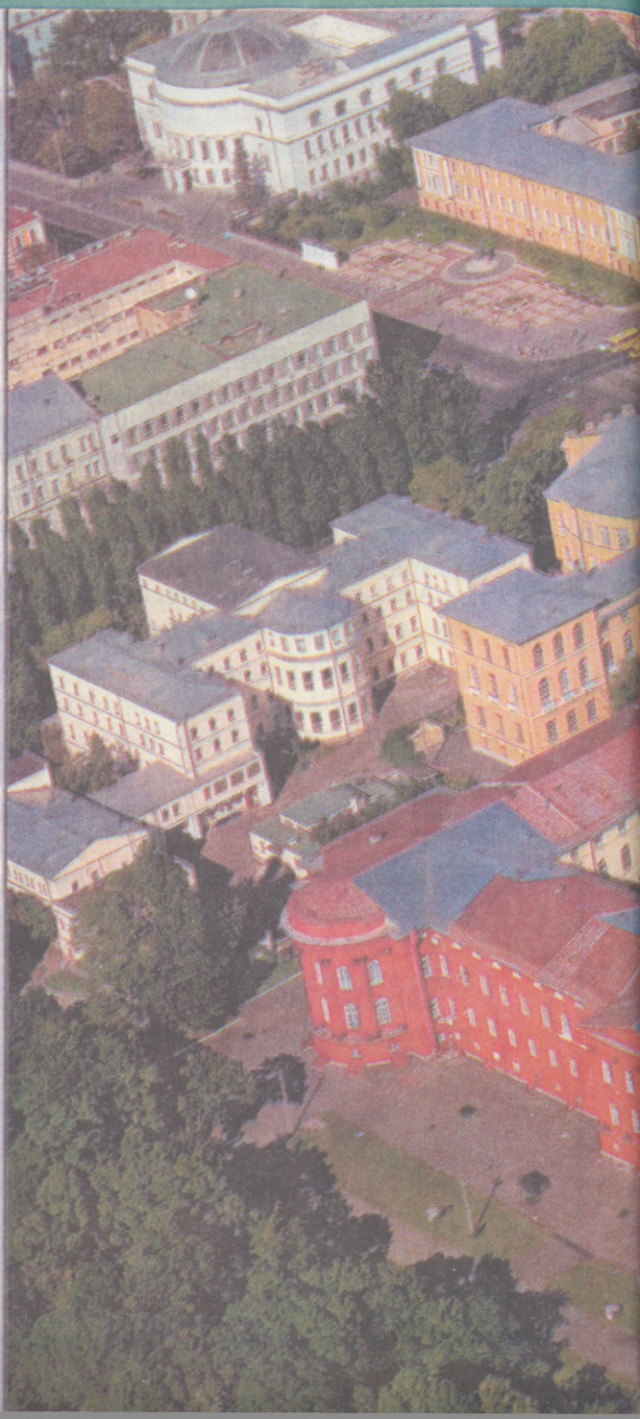
Sok sikert kívánunk az új ismeretek elsajátításában, örömet és megelégedettséget a tanulásban!

1. FEJEZET

NÉGYSZÖGEK

A fejezetből ismereteket szereztek:

- a négyszögekről, a négyszögek elemeiről és rendszerezésükről;
- milyen tulajdonságai vannak a négyszögek különböző fajtái – a paralelogramma, a téglalap, a rombusz, a négyzet, a trapéz – oldalainak és szögeinek;
- hogyan ismerhetők fel ezek az alakzatok, hogyan szerkeszthetők meg rajzeszközökkel;
- mi a kör középponti és kerületi szöge, milyen a fokmértékük;
- milyen tulajdonságai vannak, mik az ismertetőjelei a körbe írt és a kör köré írt négyszögeknek;
- hogyan alkalmazzuk a négyszögek tulajdonságait és ismertetőjeleit a gyakorlatban és a feladatok megoldása során.





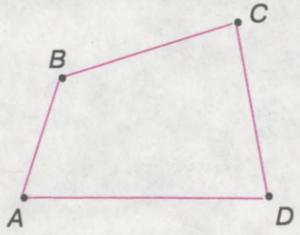


1. § A NÉGYSZÖG ÉS ELEMEI

Megjelölünk négy pontot, például A, B, C, D, melyek közül három nem fekszik egy egyenesen. Egymás után összekötjük ezeket a pontokat AB, BC, CD, DA egymást nem metsző szakaszokkal. Kapunk egy $ABCD$ *négyszöget* (1. ábra).

Az A, B, C, D pontok a négyszög *csúcsai*, az AB, BC, CD, DA szakaszok az *oldalai*. A DAB, ABC, BCD, CDA szögek a négyszög szögei. Ezek jelölhetők egy betűvel is: $A\angle$, $B\angle$, $C\angle$, $D\angle$.

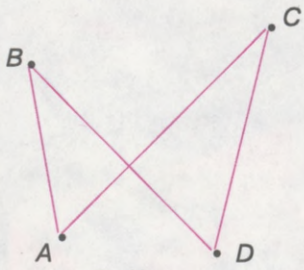
A négyszög csúcsait, oldalait és szögeit a négyszög *elemeinek* nevezzük.



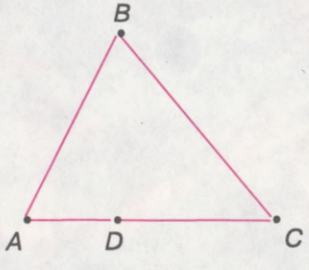
1. ábra

? A 2. és 3. rajzon ábrázolt alakzatok miért nem négyszögek?

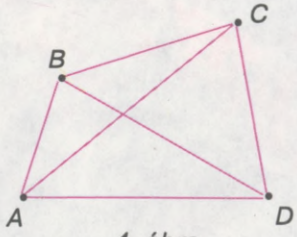
A 2. számú rajzon ábrázolt alakzaton az AC és BD szakaszok metszik egymást, a 3. rajzon ábrázolt alakzaton pedig az A, D és C pontok egy egyenesen fekszenek.



2. ábra



3. ábra



4. ábra

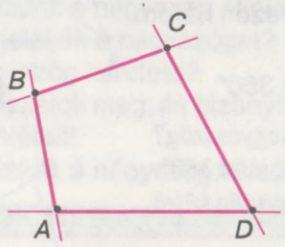
A négyszögeket úgy jelöljük, hogy egymás után írjuk a csúcsaikat jelölő betűket. Bármelyik betűvel kezdhetjük a felírást. Például a 4. ábrán ábrázolt négyszöget jelölhetjük így: $ABCD$ vagy $BCDA$ vagy $CDAB$ stb. Az adott négyszög $ADBC$ vagy $CDBA$ jelölése azonban helytelen.

A négyszög két csúcsa, két szöge, két oldala lehet *szomszédos* vagy *szemben fekvő*. Például az $ABCD$ négyszögben (4. ábra) az A és D csúcsok, az $A\angle$ és $D\angle$, az AD és AB oldalak szomszédosak, az A és C csúcsok, az $A\angle$ és a $C\angle$, AD és BC oldalak szemben fekvők.

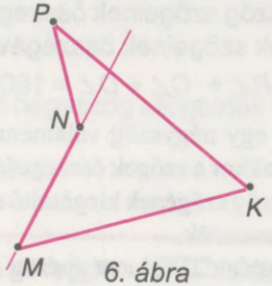
A négyszög szemben fekvő csúcsait összekötő szakaszokat a négyszög *átlóinak* nevezzük. A 4. ábrán az AC és BD szakaszok az $ABCD$ négyszög átlói.

A négyszögek lehetnek *domborúak* (konvex) és *homorúak* (konkáv).

Ha a négyszög minden két szomszédos csúcsán átmenő egyenes egy oldalán fekszik, akkor a négyszög domború. Az 5. ábrán látható négyszög domború, a 6. ábrán látható homorú, mert nem fekszik az M és N csúcsokon átmenő egyenes egy oldalán.



5. ábra



6. ábra

Mi csak domború négyszögeket tanulmányozunk.

A négyszög oldalai hosszának összegét a négyszög *kerületének* nevezzük. A kerületet P betűvel jelöljük.

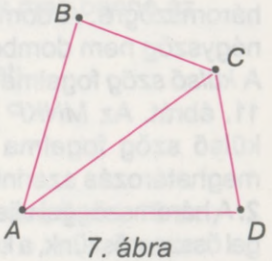
Azt, hogy az $ABCD$ négyszög kerülete 40 cm, így jelöljük: $P_{ABCD} = 40$ cm.

Feladat. Bizonyítsátok be, hogy a négyszög mindegyik oldala kisebb a másik három oldal összegénél!

Megoldás. Az AC átló az $ABCD$ négyszöget két, ABC és ADC háromszögre osztja (7. ábra). Az $ABC\Delta$-ben $AC<AB+BC$, az $ADC\Delta$-ben $AD<AC+CD$ (a háromszögek egyenlőtlensége alapján).

Akkor $AD<AC+CD<AB+BC+CD$.

Ugyanúgy $AB<BC+CD+AD$, $BC<CD+AD+AB$, $CD<AD+AB+BC$.



7. ábra

? Létezik-e olyan négyszög, melynek oldalai 1 cm, 2 cm, 3 cm és 6 cm hosszúak? Nem, mert a legnagyobb oldal hossza egyenlő a három másik oldal hosszának összegével.

Hogy megállapíthassuk, lehet-e négy, *a*, *b*, *c* és *d* szakaszból négyszöget alkotni, ellenőriznünk kell, hogy a négy szakasz közül a leghosszabb kisebb-e a másik három szakasz összegénél.

Rajzoljatok tetszőleges négyszöget! Mérjétek meg szögmérővel a szögeit! Mennyi a szögek összege?

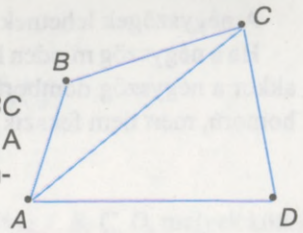
Tantétel (a négyszög szögeinek összegéről).
A négyszög szögeinek összege 360°.

Adva: *ABCD* négyszög (8. ábra).

Bebizonyítani: $A\angle + B\angle + C\angle + D\angle = 360°$.

Bizonyítás. Az *ABCD* négyszög *AC* átlója két *ABC* és *ACD* háromszögre osztja a négyszöget. A négyszög szögeinek összege egyenlő ezen háromszögek szögeinek összegével, azaz

$A\angle + B\angle + C\angle + D\angle = 180° + 180° = 360°$.

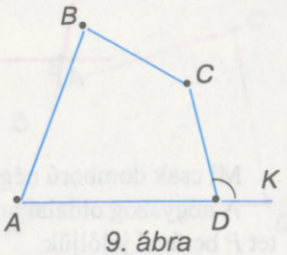


8. ábra

? Lehet-e egy négyszög valamennyi szöge hegyesszög?
Nem, mert akkor a szögek összege kisebb lenne, mint 360°.

A négyszög szögének kiegészítő szögét a négyszög *külső szögének* nevezzük.

A 9. ábrán a $CDK\angle$ a négyszög *D* csúcsnál fekvő külső szöge.



9. ábra

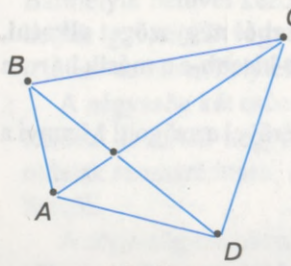
TUDJATOK TÖBBET!

1. Felmerülhet bennetek a kérdés: *Milyen eltérő tulajdonságai vannak a domború és a homorú négyszögeknek?* Az *ABCD* domború négyszög (10. ábra) átlói metszik egymást és mindegyikük két háromszögre osztja a négyszöget. Az *MNKP* homorú négyszög átlói (11. ábra) nem metszik egymást, és csupán az egyik osztja a négyszöget két háromszögre. A domború négyszög mindegyik szöge kisebb mint 180°. Ha a négyszög nem domború, akkor egyik szöge nagyobb 180°-nál.

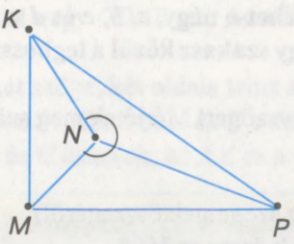
A *külső szög* fogalma csak a domború négyszögekre érvényes. Figyeljük meg a 11. ábrát. Az *MNKP* homorú négyszögben az *N* szög nagyobb, mint 180°. A külső szög fogalma a 180°-nál nagyobb szögekre nem terjed ki, mivel a meghatározás szerint ez a négyszög szögének kiegészítő szöge.

2. A háromszöggel ellentétben a négyszög nem merev alakzat. Ha négy lécet szeggel összeerősítünk, a kapott négyszög formája tetszőlegesen változtatható (12. ábra).

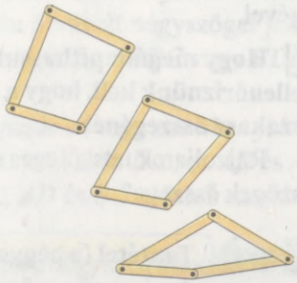
3. Az *átló* tudományos neve diagonális, mely a görög *diagonios* szóból ered. Ennek jelentése: *az, ami a szögtől a szögig terjed*. Ez a szakszó csak a XVIII. században lett általánosan elfogadott.



10. ábra



11. ábra

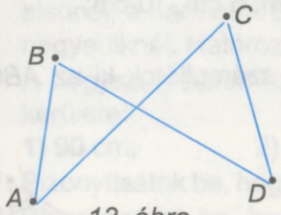

12. ábra

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

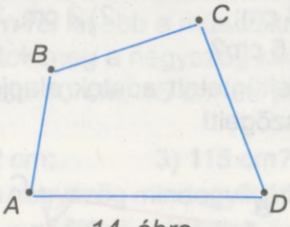
1. Mi a négyszög?
2. A négyszög mely csúcsai szomszédosak? Melyek szemben fekvők?
3. A négyszög mely oldalai szomszédosak? Melyek szemben fekvők?
4. Mit nevezünk a négyszög átlójának?
5. Hogyan jelöljük a négyszöget?
6. Mi a négyszög kerülete?
7. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a négyszög szögeinek összegéről szóló tantételt!
8. Mit nevezünk a négyszög külső szögének?

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

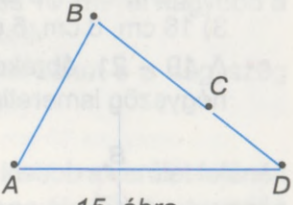
1'. A 13–15. ábrákon látható alakzatok közül melyik az *ABCD* négyszög?



13. ábra



14. ábra



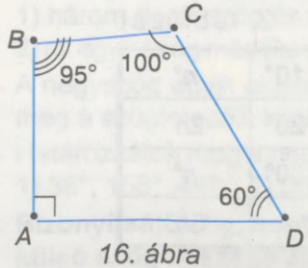
15. ábra

2'. Rajzoljatok tetszőleges *MNKP* négyszöget! Húzzátok meg benne az átlókat! Jelöljétek :
1) a szemben fekvő oldalakat, csúcsokat és szögeket;
2) a szomszédos oldalakat, csúcsokat és szögeket;
3) az átlókat!

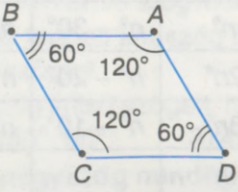
3'. Határozzátok meg a négyszög kerületét, ha oldalai:
1) 1 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm; 2) 5 cm, 7 cm, 9 cm, 10 cm;
3) 12 mm, 10 mm, 8 mm, 4 mm!

4'. Helyesen van-e feltüntetve a 16 – 17. ábrákon az *ABCD* négyszög szögeinek fokmértéke? A feleletet magyarázzátok meg!

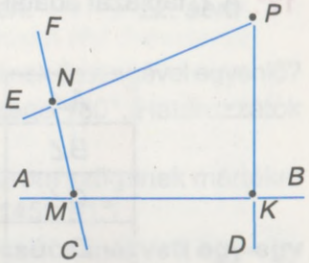
5'. Jelöljétek a 18. ábrán bemutatott *MNPK* négyszög külső szögeit:
1) az *N*; 2) az *M*; 3) a *K* csúcsoknál!



16. ábra



17. ábra



18. ábra

6°. a, b, c, d a négyszög oldalai, P a kerülete. Töltsétek ki az 1. táblázatot!

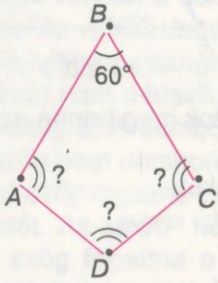
1. táblázat

a	8 cm	10 cm	5 cm	23 cm	
b	12 cm	25 cm	13 cm		16 cm
c	16 cm	30 cm		30 cm	20 cm
d	18 cm		17 cm	35 cm	24 cm
P		90 cm	60 cm	115 cm	74 cm

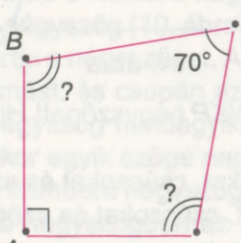
7°. Határozzátok meg a négyszög oldalait, melynek kerülete 140 cm, és egyik oldala n-szer kisebb a többi oldal mindegyikénél, ha:
1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 9$!

8°. Létezik-e olyan négyszög, melynek oldalai:
1) 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm; 2) 2 cm, 3 cm, 5 cm, 10 cm;
3) 18 cm, 6 cm, 5 cm, 6 cm?

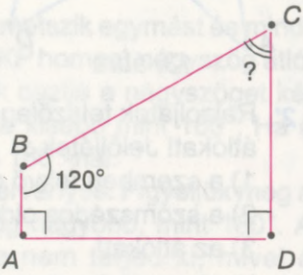
9°. A 19 – 21. ábrákon feltüntetett adatok alapján számoljátok ki az $ABCD$ négyszög ismeretlen szögeit!



19. ábra



20. ábra



21. ábra

10°. Határozzátok meg a négyszög ismeretlen szögét, ha másik három szöge:
1) 60°, 100°, 50°; 2) 120°, 80°, 100°; 3) 70°, 130°, 90°.

11°. Lehetnek-e egy négyszög szögei az alábbi fokmértékűek:
1) 55°, 75°, 100°, 80°; 2) 160°, 95°, 45°, 60°; 3) 145°, 85°, 70°, 65°?

12°. A 2. táblázat adatai alapján határozzátok meg az $ABCD$ négyszög szögeit!

2. táblázat

$A\angle$	$n°$	$n° - 30°$	$n° + 10°$	$n°$
$B\angle$	$2n°$	$n° - 20°$	$n° + 20°$	$2n°$
$C\angle$	$3n°$	$n° - 10°$	$n° + 30°$	$n°$
$D\angle$	$4n°$	$n°$	$n°$	$5n°$

13°. Lehet-e egy négyszög mindegyik szöge tompaszög? Adjatok magyarázatot!

14°. A négyszög szögei egyenlők egymással. Határozzátok meg a szögek nagyságát!

15°. A négyszög két szöge derékszög. Mennyi a másik két szög összege?

16°. **A négyszög három szöge derékszög. Bizonyítsátok be, hogy a negyedik szög is derékszög!**

17°. Határozzátok meg az $ABCD$ négyszög C csúcsánál fekvő külső szöget, ha:
1) $C\angle = 75°$;
2) $A\angle = B\angle = C\angle = 90°$;
3) $B\angle = D\angle = 110°$, $A\angle = 60°$!

18. Határozzátok meg a négyszög oldalait, ha kerülete 66 cm, egyik oldala 8-cm-rel nagyobb a másiknál, és ugyanannyival kisebb a harmadiknál, a negyedik oldal pedig háromszor nagyobb a másodiknál!

19. A négyszög egyik oldala 9 cm, a második oldala háromszor nagyobb az elsőnél, a harmadik 8 cm-rel kisebb a másodiknál és 10 cm-rel nagyobb a negyediknél. Határozzátok meg a négyszög kerületét!

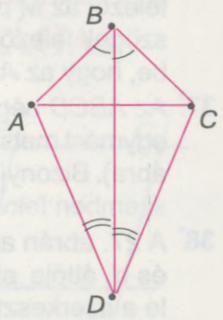
20. A négyszög három oldala 10 cm, 15 cm és 20 cm. Lehet-e a négyszög kerülete:
1) 90 cm; 2) 72 cm; 3) 115 cm?

21. Bizonyítsátok be, hogy a négyszög mindegyik átlója kisebb a kerület felénél!

22. Bizonyítsátok be, hogy a négyszög átlóinak összege kisebb a négyszög kerületénél!

23. Az $ABCD$ négyszögben a BD átló a B és D szögeket felezi (22. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $AB = BC$ és $CD = AD$!

24. Ha az $ABCD$ négyszögben $AB = BC$ és $CD = DA$, akkor az AC és BD átlók merőlegesek egymásra (22. ábra). Bizonyítsátok be!



22. ábra

25. Határozzátok meg a négyszög szögeit, ha azok mértéke úgy aránylik egymáshoz, mint az alábbi számok:
1) 1, 2, 3, 4; 2) 1, 2, 4, 5; 3) 4, 6, 12, 14!

26. A négyszögben milyen szög lehet a legtöbb:
1) tompaszög; 2) derékszög; 3) hegyesszög?

27. Lehet-e olyan négyszöget szerkeszteni, amelyikben:
1) három derékszög és egy tompaszög van;
2) az egyik szög mértéke a másik három szög mértékének összegével egyenlő?

28. A négyszög egyik oldalához tartozó két szög összege 180°. Határozzátok meg a szögfelezőik közötti szöget!

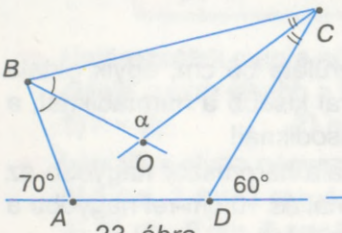
29. Határozzátok meg a négyszög külső szögeit, ha három szögének mértéke:
1) 38°, 158°, 44°; 2) 50°, 150°, 65°; 3) 49°, 145°, 91°!

30. **Bizonyítsátok be, hogy a négyszög mindegyik csúcsánál vett egy-egy külső szög összege 360°!**

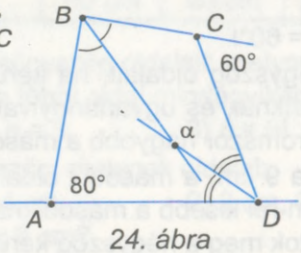
31. Létezik-e olyan négyszög, melynek külső szögei:
1) 120°, 80°, 59°, 101°; 2) 49°, 98°, 68°, 125°;
3) 100°, 55°, 160°, 45°?

32. **Keressétek meg az összefüggést a négyszög szögeinek összege és a négyszög külső szögeinek összege között!**

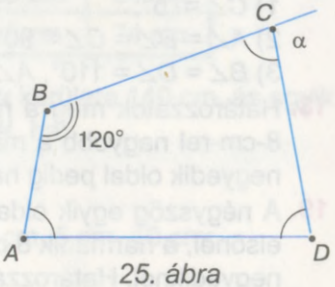
33. A 23 – 25. ábrákon feltüntetett adatok alapján számítsátok ki az α szög mértékét!



23. ábra



24. ábra



25. ábra

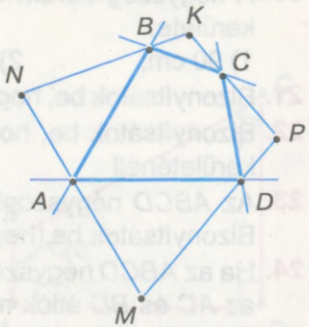
34.* A négyszöget az átló két háromszögre osztja, melyek kerülete 30 cm és 40 cm. Határozzátok meg az átló hosszát, ha a négyszög kerülete 50 cm!

35.* Bizonyítsátok be, hogy a négyszög két szemben fekvő oldalának összege kisebb az átlók összegénél!

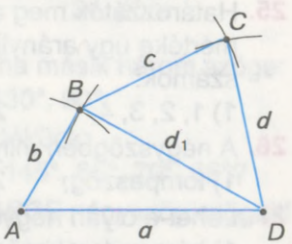
36.* Az *ABCD* négyszögben az *A* és *B* szögek szögfelezői az *M* pontban metszik egymást, a *C* és *D* szögek felezői pedig az *N* pontban. Bizonyítsátok be, hogy az *AMB* és *CND* szögek összege 180°!

37.* Az *ABCD* négyszög külső szögeinek szögfelezői egymást metszve *MNKP* négyszöget alkotnak (26. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az *MNKP* négyszög szemben fekvő szögeinek összege 180°!

38.* A 27. ábrán az *ABCD* négyszög *a, b, c, d* oldalai és d_1 átlója alapján van megszerkesztve. Írjátok le a szerkesztés menetét!



26. ábra



27. ábra

Négyszög szerkesztéséhez először szerkesszetek két háromszöget, amelyek a négyszöget alkotják.

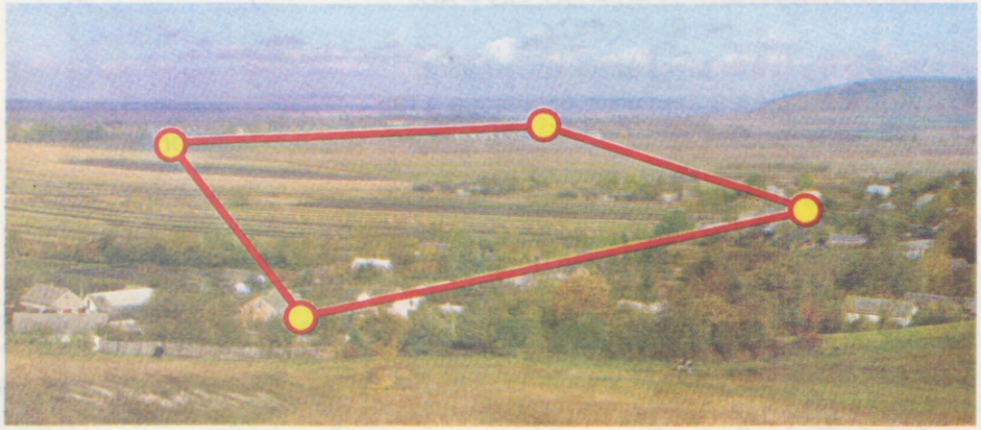
Például (27. ábra) először szerkesszétek meg az *ABD*Δ-et, majd a *BCD*Δ-et. Az *ABD*Δ megszerkesztéséhez venni kell annak három elemét, a *BCD*Δ megszerkesztéséhez csak két elem szükséges, mert a közös *BD* oldal már meg van rajzolva.

39.* Szerkesszetek négyszöget négy adott *a, b, c, d* oldala és α szöge alapján!

40.* Szerkesszetek négyszöget *a, b, c* oldalai, valamint d_1 és d_2 átlói alapján!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

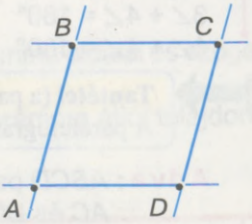
41.* Négy település egy négyszög csúcsaiban fekszik. Milyen helyre kell a gyárat építeni, hogy a településektől mért távolságok összege a legkisebb legyen?





2.§. A PARALELOGRAMMA ÉS TULAJDONSÁGAI

Ha két párhuzamos egyenest metszünk másik két párhuzamos egyenessel, akkor olyan négyszöget kapunk, melynek szemben fekvő oldalai páronként párhuzamosak. Az $ABCD$ négyszögben (28. ábra) $AD \parallel BC$ és $AB \parallel DC$.

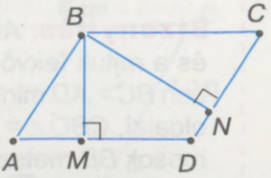


28. ábra

Az olyan négyszöget, melynek szemben fekvő oldalai páronként párhuzamosak, ***paralelogrammának*** nevezzük.

A paralelogramma *magassága* az egyik oldal bármely pontjából egy másik, vele párhuzamos oldalra (vagy annak meghosszabbítására) bocsátott merőleges.

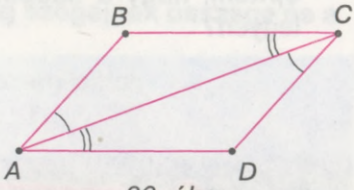
A 29. ábrán a BM és BN szakaszok az $ABCD$ paralelogramma magasságai.



29. ábra

Tantétel (a paralelogramma oldalai és szögei tulajdonságairól).
A paralelogramma szemben fekvő oldalai és szögei egyenlők egymással.

Adva: $ABCD$ paralelogramma (30. ábra).
Bebizonyítani: 1) $AB = DC$, $BC = AD$;
2) $A\angle = C\angle$, $B\angle = D\angle$.

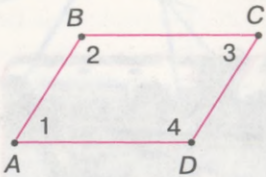


30. ábra

Bizonyítás: Meghúzzuk az AC átlót. $ABC\Delta = CDA\Delta$ a megfelelő oldalak és a rajtuk fekvő szögek alapján. AC oldal közös, $BCA\angle = DAC\angle$ mint a BC és AD párhuzamosok és AC metsző egyenes által alkotott belső váltószögek. $BAC\angle = DCA\angle$, mint az AB és DC párhuzamosok és AC metsző egyenes által alkotott belső váltószögek. Az ABC és CDA háromszögek egybevágóságából következik:
1) $AB = DC$, $BC = AD$; 2) $B\angle = D\angle$.
A paralelogramma A és C szögei egyenlők egymással, mint egyenlő szögek összegei.

? Lehet-e egy paralelogrammának csak egy hegyesszöge? Nem, mert a bebizonyított tantétel alapján két ilyen szögnek kell lenni.

Feladat. A paralelogramma egy oldalán fekvő szögek összege 180°. Bizonyítsátok be!

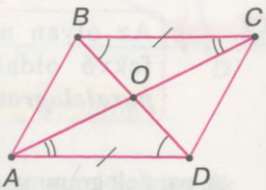


31. ábra

Megoldás. $1\angle + 2\angle = 180°$ (31. ábra), mint a BC és AD párhuzamos egyenesek AB metsző egyenessel alkotott társszögek.
Hasonlóan $2\angle + 3\angle = 180°$ ($AB \| CD$, BC metsző egyenes);
$3\angle + 4\angle = 180°$ ($BC \| AD$, CD metsző egyenes),
$1\angle + 4\angle = 180°$ ($AB \| CD$, AD metsző egyenes).

Tantétel (a paralelogramma átlóinak tulajdonsága).
A paralelogramma átlóinak metszéspontja felezi a paralelogramma átlóit.

Adva: $ABCD$ paralelogramma (32. ábra),
AC és BD átlók,
O az átlók metszéspontja.
Bebizonyítani: $AO = OC$, $BO = OD$.



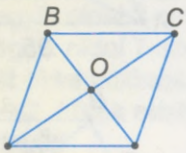
32. ábra

Bizonyítás. $AOD\Delta = COB\Delta$ a megfelelő oldalak és a rajtuk fekvő szögek alapján. A háromszögekben $BC = AD$ mint a paralelogramma szemben fekvő oldalai, $CBO\angle = ADO\angle$ mint a BC és AD párhuzamosok BD metszővel alkotott belső váltószögek. $BCO\angle = DAO\angle$ ($BC \| AD$, ahol AC metsző egyenes). Az AOD és a COB háromszögek egybevágóságából következik: $AO = OC$, $BO = OD$.

A szakaszok vagy szögek egyenlőségét a paralelogrammán belül úgy bizonyíthatjuk, hogy bebizonyítjuk a háromszögek egyenlőségét, melyek elemei ezek a szakaszok vagy szögek.

A paralelogramma tulajdonságait a 3. táblázat szemlélteti.

3. táblázat

ABCD paralelogramma	Tulajdonságok
	**1.** $AB = DC$, $AD = BC$
	2. $A\angle = C\angle$, $B\angle = D\angle$
	3. $AO = OC$, $BO = OD$
	4. $A\angle + B\angle = 180°$, $A\angle + D\angle = 180°$

TUDJATOK TÖBBET!

1. Felmerül a kérdés: *hány adatra van szükség a paralelogramma megszerkesztéséhez?* Három adatra, melyek között lenni kell egy szögnek (egy szög alapján meghatározható a paralelogramma mindegyik szöge).

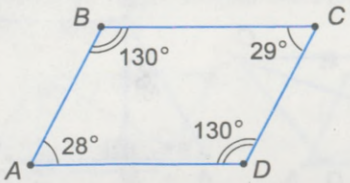
2. A *paralelogramma* elnevezés a görög *paralelosz* – az, amely mellette halad, és a *gramma* – vonal szavak összevonásából származik. Ez a szakszó először Eukleidész (i. e. III. sz.) *Elemek* című munkájában jelenik meg. Kezdetben az ógörög tudós a paralelogramma szó helyett a párhuzamos vonalak által alkotott sík szókapcsolatot használta (vagyis a síknak két pár párhuzamos egyenes által határolt része).

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

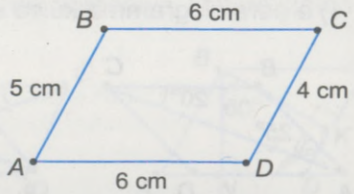
1. Mit nevezünk paralelogrammának?
2. Mi a paralelogramma magassága?
3. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a paralelogramma oldalai és szögei tulajdonságáról szóló tantételt!
4. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a paralelogramma átlói tulajdonságáról szóló tantételt!

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

42' Helyesen tünteti-e fel a 33. és 34. ábra a szögek fokmértékét és a paralelogramma oldalainak hosszát?



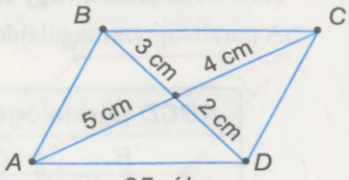
33. ábra



34. ábra

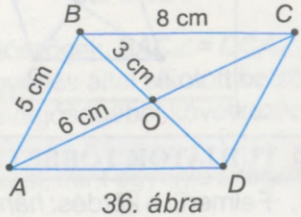
43. Az $MNPK$ paralelogrammában $MN = a$, $NP = b$. Mivel egyenlő a PK és MK oldal, ha: 1) $a = 5$ cm, $b = 10$ cm; 2) $a = 1{,}2$ dm, $b = 0{,}4$ dm? Magyarázzátok meg a feleletet!

44. Az $ABCD$ paralelogrammában $ABC\angle = \alpha$, $BCD\angle = \beta$. Mivel egyenlő az ADC és a BAD szög, ha: 1) $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$; 2) $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$; 3) $\alpha = \beta = 90°$. A feleletet indokoljátok meg!



35. ábra

45. A 35. ábrán helyesen vannak-e feltüntetve a paralelogramma átlói metszeteinek méretei? A feleletet indokoljátok meg!



36. ábra

46. Az $ABCD$ paralelogramma (36. ábra). A rajzon feltüntetett adatok alapján határozzátok meg: 1) az OC és OD szakaszokat; 2) az AC és BD átlókat; 3) az AD és DC oldalakat!

47. Az A, B, C és D az $ABCD$ paralelogramma szögei. Rajzoljátok át a 4. táblázatot a munkafüzetbe és töltsétek ki!

4. táblázat

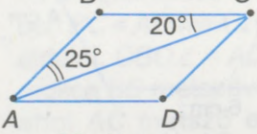
$A\angle$	35°			
$B\angle$		140°		
$C\angle$			75°	
$D\angle$				64°

48. Lehetnek-e a paralelogrammának ilyen szögei: 1) 30° és 60°; 2) 55° és 125°; 3) 116° és 123°?

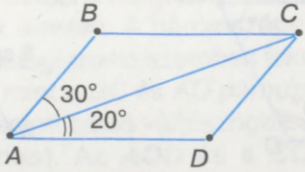
49. Lehet-e a paralelogrammában: 1) mindegyik szög hegyesszög; 2) csak három egymással egyenlő szög; 3) csak egy tompaszög? A feleletet magyarázzátok meg!

50. A 37–39. ábrákon feltüntetett adatok alapján határozzátok meg az $ABCD$ paralelogramma szögeit!

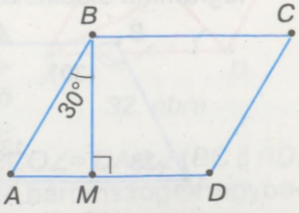
51. Határozzátok meg a paralelogramma szögeit, ha: 1) az egyik szög háromszor nagyobb a másiknál; 2) az egyik szög 50°-kal kisebb a másiknál; 3) két szög összege 120°; 4) a paralelogramma külső szöge 140°!



37. ábra



38. ábra



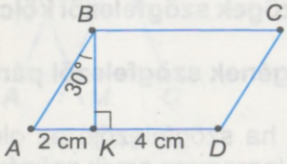
39. ábra

52° A paralelogramma szögének felezője α szög alatt metszi a paralelogramma oldalát. Határozzátok meg a paralelogramma szögeit, ha:
1) $\alpha = 29°$; 2) $\alpha = 34°$; 3) $\alpha = 45°$!

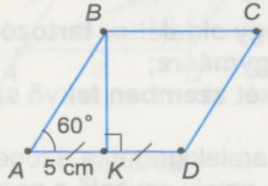
53° Lehet-e a paralelogrammának csak három egyenlő oldala? A feleletet magyarázzátok meg!

54° A paralelogramma kerülete 48 cm. Állítsatok össze képletet, és határozzátok meg a paralelogramma oldalait, ha:
1) az egyik oldal 3 cm-rel nagyobb a másiknál;
2) az egyik oldal 7-szer kisebb a másiknál;
3) a két oldal különbsége 7 cm!

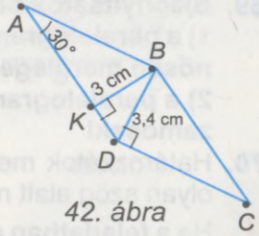
55° A 40 – 42. ábrák adatai alapján határozzátok meg az *ABCD* paralelogramma oldalait!



40. ábra



41. ábra



42. ábra

56° **Bizonyítsátok be, hogy a paralelogrammát az átló két egybevágó háromszögre osztja!**

57° A paralelogramma oldalai 3 cm és 5 cm. Lehet-e a paralelogramma átlója: 1) 10 cm; 2) 8 cm; 3) 4 cm?

58° Létezik-e olyan paralelogramma, melynek két átlója és egy oldala megfelelően egyenlő: 1) 4 cm, 10 cm, 6 cm; 2) 8 cm, 10 cm, 9 cm; 3) 8 cm, 10 cm, 10 cm?

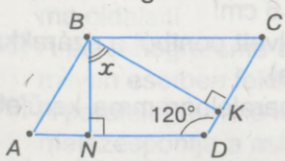
59° Bizonyítsátok be, hogy a távolságok összege a paralelogramma bármely belső pontja és a paralelogramma oldalai között állandó mennyiség! Mivel egyenlő ez az összeg?

60° Jelöljetek ki három, nem egy egyenesen fekvő pontot! Hány paralelogramma szerkeszthető, melyek csúcsai ezekben a pontokban vannak? Végezzétek el a szerkesztéseket!

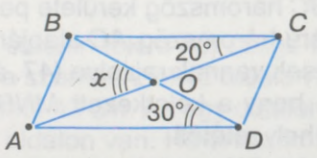
61. Határozzátok meg a paralelogramma szögeit, ha a két szög úgy aránylik, mint:
1) 2 : 3; 2) 4 : 5; 3) 3 : 7!

62. Határozzátok meg a paralelogramma szögeit, ha:
1) egyik szöge a másik kettő összegével egyenlő;
2) az egyik szög 4-szer nagyobb a másik kettő összegénél;
3) az egyik szög fele a másik harmadrészével egyenlő!

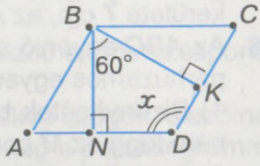
63. A 43 – 45. rajzokon paralelogrammák vannak ábrázolva. Határozzátok meg az *x* szöget!



43. ábra



44. ábra



45. ábra

64. A paralelogramma tompaszögének csúcsából két magasság van húzva. A magasságok közötti szög α. Határozzátok meg a paralelogramma szögeit, ha: 1) $\alpha = 35°$; 2) $\alpha = 45°$; 3) $\alpha = 89°$!

65. **Bizonyítsátok be, hogy a paralelogramma magasságai közötti szög a paralelogramma hegyesszögével egyenlő!**

66. Az *ABCD* paralelogrammában a *BD* átló a *CD* oldallal 68°-os szöget alkot. Az $ABC\angle = 84°$. Határozzátok meg az *ADB* és *BCD* szögek mértékét!

67. Határozzátok meg a paralelogramma szögeit, ha egyik átlója egyenlő az oldalával és arra merőleges!

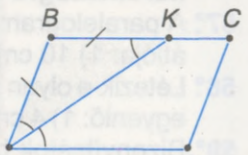
68. Az *ABCD* paralelogramma *A* és *B* szögének szögfelezői a *K* pontban metszik egymást. Milyen típusú az *ABK* háromszög?

69. **Bizonyítsátok be:**
1) a paralelogramma egy oldalához tartozó szögek szögfelezői kölcsönösen merőlegesek egymásra;
2) a paralelogramma két szemben fekvő szögének szögfelezői párhuzamosak!

70. Határozzátok meg a paralelogramma szögeit, ha szögfelezője az oldalt olyan szög alatt metszi, amely egyenlő a paralelogramma egyik szögével!

Ha a feladatban adott a paralelogramma szögének szögfelezője, akkor a keletkezett háromszög egyenlő szárú (az *ABK*Δ a 46. ábrán). **Alkalmazzátok tulajdonságait!**

71. Az *ABCD* paralelogramma *A* szögének szögfelezője a *BC* oldalt a *K* pontban metszi (46. ábra). $BK = a$, $KC = b$. Határozzátok meg a paralelogramma kerületét, ha: 1) $a = 14$ cm, $b = 7$ cm; 2) $a = 2$ cm, $b = 3$ cm!



46. ábra

72. Az *ABCD* paralelogramma *A* szögének szögfelezője a *BC* oldalt a *K* pontban metszi. Számítsátok ki: 1) *BK*-t és *KC*-t, ha $AB = 6$ cm, $AD = 9$ cm; 2) *AD*-t, ha $AB = 4$ cm, $KC = 11$ cm; 3) a paralelogramma kerületét, ha $AD = 14$ cm, $BK : KC = 3 : 4$!

73. Az *ABCD* paralelogrammában az átlók *O* metszéspontján keresztül egyenes van húzva, amely a *BC* és *AD* oldalakat az *E* és *F* pontokban metszi. 1) Bizonyítsátok be, hogy: a) $OE = OF$; b) $BE = DF$; c) $CE = AF$! 2) Számítsátok ki a paralelogramma *BC* és *AD* oldalait, ha $BE = 5$ cm, $AF = 4$ cm!

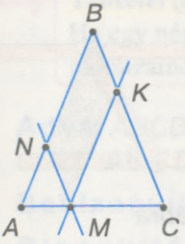
74. Az *M* és *N* pontok az *ABCD* paralelogramma *BC* és *AD* oldalainak felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az *AC* átlót a *BN* és *MD* szakaszok három egyenlő részre osztják!

75. Határozzátok meg az *ABCD* paralelogramma *AC* átlójának hosszát, ha kerülete 7 cm, az *ABC* háromszög kerülete pedig 6 cm!

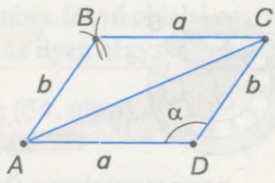
76. Az *ABC* egyenlő szárú háromszög *AC* alapján felvett pontból a szárakkal párhuzamos egyenesek vannak rajzolva (47. ábra). 1) Bizonyítsátok be, hogy a keletkezett *MNBK* paralelogramma kerülete nem függ az *M* pont helyzetétől! 2) Számítsátok ki az *MNBK* paralelogramma kerületét, ha $AB = 15$ cm!

77. Állítsátok össze a paralelogramma szerkesztésének tervét:
1) az a és b oldalak és az α szög alapján (48. ábra);
2) az a oldal és a d_1, d_2 átlók alapján (49. ábra)!

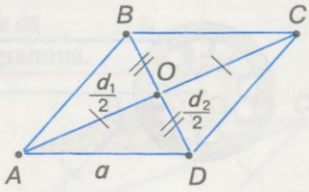
A paralelogramma megszerkesztéséhez először kisegítő háromszöget szerkesztünk ($ADC\Delta$ a 48. ábrán vagy $AOD\Delta$ a 49. ábrán). Ezután a paralelogramma tulajdonságainak ismeretében megszerkesztjük a paralelogrammát.



47. ábra



48. ábra



49. ábra

78. Szerkesszetek paralelogrammát:
1) a és b oldala, valamint d átlója alapján;
2) d_1 és d_2 átlója és a közöttük fekvő α szög alapján;
3) az a oldal, a d átló, és az átlóval szemben fekvő α szög alapján;
4) az a oldal, a d átló, és a közöttük fekvő α szög alapján!

79.* A paralelogramma két szöge úgy aránylik egymáshoz, mint 1:3. Határozzátok meg a paralelogramma magasságai közötti szöget, melyeket:
1) a tompaszög csúcsából; 2) a hegyesszög csúcsából húzunk!

80.* A paralelogramma hegyesszöge 60°. A tompaszög csúcsából húzott magasság felezi az oldalt. Határozzátok meg a paralelogramma kisebbik átlóját, ha a kerület 24 cm!

81.* A paralelogramma egyik szöge háromszor nagyobb a másiknál. A tompaszög csúcsából húzott magasság az oldalt 2 cm és 4 cm hosszúságú szakaszokra osztja. Határozzátok meg a paralelogramma magasságát!

82.* A paralelogrammát, melynek kerülete 50 cm, az átlók négy háromszögre osztják. Határozzátok meg a paralelogramma oldalait, ha a két különböző háromszög kerülete között a különbség 5 cm!

83.* Az egy oldalon fekvő szögek felezői milyen paralelogrammában osztják a szemben fekvő oldalt három egyenlő részre?

84.* Az $ABCD$ paralelogramma kerülete 48 cm. Az A és D szögek szögfelezői a BC oldalt három egyenlő részre osztják. Határozzátok meg a paralelogramma oldalait!

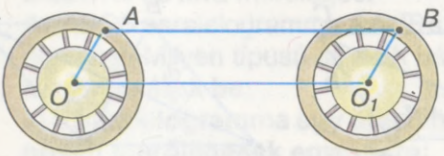
85.* A paralelogramma egy oldalán fekvő két szöge felezőinek metszéspontja milyen esetben fekszik a szemben fekvő oldalon?

86.* A paralelogramma kerülete 42 cm. Az egy oldalon fekvő szögek felezőinek metszéspontja a másik oldalon van. Határozzátok meg a paralelogramma oldalait!

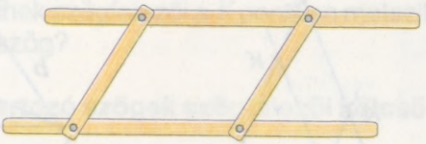
ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

87. A rajzon (50. ábra) két egyforma kerék van ábrázolva. Az AB rúd, melynek hossza a két kerék középpontja közötti OO_1 távolsággal egyenlő, átadja a forgást az egyik kerékről a másikra. Milyen lehet az AB rúd és a középpontok közötti OO_1 vonal kölcsönös helyzete?

88. Párhuzamos vonalak rajzolásához párhuzamvonalzót használnak (51. ábra). Magyarázzátok meg a vonalzó használatát!



50. ábra



51. ábra



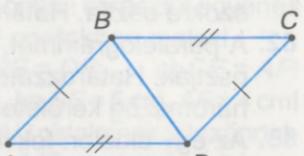
3. §. A PARALELOGRAMMA ISMERTETŐJELEI

Feladatok megoldásakor szükség lehet annak megállapítására, hogy az adott négyszög paralelogramma vagy sem. Ezt könnyen eldönthetjük, ha tudjuk a paralelogramma ismertetőjeleit.

Tantétel (a paralelogramma ismertetőjele).
Ha egy négyszög szemben fekvő oldalai páronként egyenlők, akkor a négyszög paralelogramma.

Adva: $ABCD$ négyszög (52. ábra).
$AB = DC$, $BC = AD$.

Bebizonyítani: $ABCD$ paralelogramma.

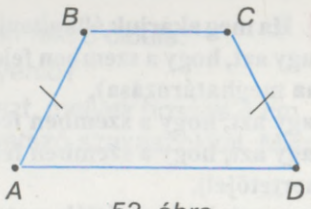


52. ábra

Bizonyítás. Meghúzzuk a BD átlót (52. ábra). $BCD\Delta = DAB\Delta$ a három oldal alapján. BD oldal közös, $AB = DC$, $BC = AD$ a feltétel szerint. A háromszögek egybevágóságából következik: $CBD\angle = ADB\angle$, $ABD\angle = CDB\angle$. A CBD, ADB szögek a BC, valamint az AD egyenesek és a BD metsző által alkotott belső váltószögek. Ezért $BC \parallel AD$. Hasonlóan az ABD és CDB szögek is az AB, DC egyenesek és BD metsző által alkotott belső váltószögek. Ezért $AB \parallel DC$.
Amennyiben az $ABCD$ négyszögben $BC \parallel AD$ és $AB \parallel DC$, akkor a meghatározás szerint a négyszög paralelogramma.

? Minden esetben paralelogramma lesz-e egy olyan négyszög, amelynek két szemben fekvő oldala egyenlő egymással, a másik kettő pedig párhuzamos?

Nem lehet. Az 53. ábrán $AB = CD$, $BD \parallel AD$, azonban az $ABCD$ négyszög nem paralelogramma.

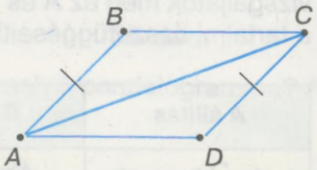


53. ábra

Tantétel (a paralelogramma ismertetőjele).
Ha egy négyszög szemben fekvő oldalai egyenlők és párhuzamosak, akkor az ilyen négyszög paralelogramma.

Adva: $ABCD$ négyszög (54. ábra).
$AB = DC$, $AB \parallel DC$.

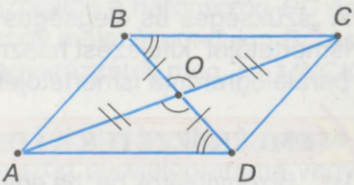
Bebizonyítani: $ABCD$ paralelogramma.



54. ábra

Bizonyítás. Meghúzzuk az AC átlót (54. ábra). $ABC\Delta = CDA\Delta$ két oldal és a közöttük levő szög alapján. AC oldal közös, $AB = DC$ a feltétel szerint, $BAC\angle = DCA\angle$ mint az AB és DC párhuzamosok és az AC metsző által alkotott belső váltószögek. A háromszögek egybevágóságából következik: $DAC\angle = BCA\angle$. A DAC és BCA szögek a BC és AD egyenesek és az AC metsző által alkotott belső ványltószögek. Ezért $BC \parallel AD$-vel. Amennyiben az $ABCD$ négyszögben $AD \parallel BC$-vel (a bizonyítás szerint), és $AB \parallel DC$ (a feltétel szerint), akkor a meghatározás alapján ez a négyszög paralelogramma.

Feladat (a paralelogramma ismertetőjele).
Ha a négyszög átlói metszik és metszéspontjukban felezik egymást, akkor ez a négyszög paralelogramma.
Bizonyítsátok be!



55. ábra

Megoldás. Legyen $ABCD$ az adott négyszög, O az átlók metszéspontja és $BO = OD$, $AO = OC$ (55. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma.
$BOC\Delta = DOA\Delta$ két oldal és a közöttük fekvő szög alapján. A háromszögekben $BO = OD$, $AO = OC$ a feltétel szerint, $BOC\angle = DOA\angle$ mint csúcsszögek. A háromszögek egybevágóságából következik: $BC = AD$, $OBC\angle = ODA\angle$.
De az OBC és ODA szögek a BC és AD egyenesek, valamint a BD metsző által alkotott belső váltószögek.
Ezért $BC \parallel AD$.
Mivel az $ABCD$ négyszögben $BC = AD$ és $BC \parallel AD$, ezért a bebizonyított ismertetőjel alapján ez a négyszög paralelogramma.

Ha meg akarjuk állapítani, hogy egy négyszög paralelogramma, be kell bizonyítani:
vagy azt, hogy a szemben fekvő oldalak páronként párhuzamosak (a paralelogramma meghatározása),
vagy azt, hogy a szemben fekvő oldalak páronként egyenlők (ismertetőjele),
vagy azt, hogy a szemben fekvő oldalak páronként párhuzamosak és egyenlők (ismertetőjel),
vagy azt, hogy az átlók metszéspontja felezi az átlókat ((ismertetőjel).

TUDJATOK TÖBBET!

Előfordulhat, hogy találkoztok ilyen fogalmakkal: „szükséges feltétel", „elégséges feltétel", „szükséges és elégséges feltétel". Az 5. táblázat adatai alapján vizsgáljátok meg az *A* és *B* állításokat, és derítsétek ki ezeknek a fogalmaknak a tartalmi összefüggéseit!

5. táblázat

A állítás	*B* állítás	Az állítások közötti kapcsolat	A feltétel fajtája
A négyszög paralelogramma	A négyszög szemben fekvő oldalai egyenlők	Az *A*-ból következik a *B* ($A \Rightarrow B$)	*A* a *B elégséges feltétele*
			B az *A szükséges feltétele*
A négyszög paralelogramma	A négyszög szemben fekvő oldalai páronként egyenlők	Az *A*-ból következik a *B*, a *B*-ből következik az *A* ($A \Leftrightarrow B$)	Az *A* a *B szükséges* és *elégséges feltétele* és viszont

Figyeljetek arra, hogy „az *A* a *B* elégséges feltétele" és „az *A* a *B* szükséges feltétele" állítások kölcsönösen megfordíthatók. Egyesíthetjük azokat, és így fogalmazhatunk:
Ahhoz, hogy egy négyszög paralelogramma legyen, szükséges és elégséges feltétel a szemben fekvő oldalak egyenlősége.
A „szükséges és elégséges feltétel" helyett néha a „szükséges és elégséges ismertetőjel" kifejezést használják. Ezért ennek a paragrafusnak a tantételeit „a paralelogramma ismertetőjeleinek" nevezzük.

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Bizonyítsátok be: ha egy négyszög szemben fekvő oldalai páronként egyenlők, akkor a négyszög paralelogramma!
2. Bizonyítsátok be: ha egy négyszög két szemben fekvő oldala párhuzamos és egyenlő, akkor a négyszög paralelogramma!
3. Bizonyítsátok be: ha egy négyszög átlói metszik és metszéspontjukban felezik egymást, akkor ez a négyszög paralelogramma!
4. Magyarázzátok meg, miként győződhetünk meg arról, hogy egy négyszög paralelogramma!

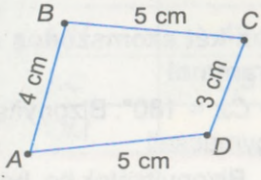
OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

89'. Paralelogramma-e az olyan négyszög, melynek csak két szemben fekvő oldala párhuzamos? Adjatok magyarázatot!

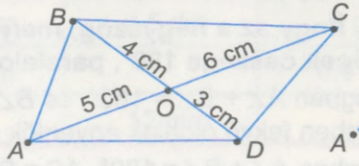
90'. Az 56. ábrán látható négyszög miért nem paralelogramma?

91'. Paralelogramma-e a négyszög, ha két szemben fekvő oldala:
1) párhuzamos; 2) párhuzamos és egyenlő?

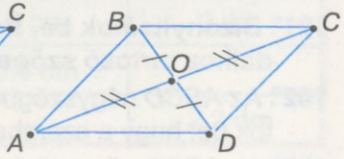
92'. Rajzoljatok két egyenlő és párhuzamos szakaszt, melyek hossza 4 cm. Végpontjaikat kössétek össze egymást nem metsző szakaszokkal. Miért paralelogramma a kapott négyszög?



56. ábra

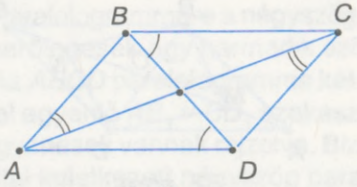


57. ábra

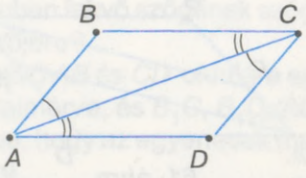


58. ábra

93'. Az 57. és 58. ábrákon látható négyszögek közül melyik paralelogramma? A feleletet magyarázzátok meg!



59. ábra



60. ábra

94°. Az 59. és 60. ábrák adatai alapján bizonyítsátok be, hogy az *ABCD* négyszög paralelogramma!

95°. Szerkesszetek tetszőleges *ABC* háromszöget, és az *AB* oldalon jelöljetek meg egy *M* pontot. Az *M* ponton keresztül rajzoljatok a háromszög *BC* és *AC* oldalával párhuzamos egyeneseket úgy, hogy metszéspontjuk a *BC* és *AC* oldalakkal megfelelően *N* és *K* legyen. Magyarázzátok meg, az *MNCK* négyszög miért paralelogramma!

96°. A szög belső tartományának tetszőleges pontjából húzzatok párhuzamosokat a szög száraival. Az így kapott négyszög paralelogramma vagy sem? A feleletet magyarázzátok meg!

97°. Paralelogramma-e a *KLMN* négyszög, ha:
1) $KL = MN$; 2) $KL = MN$ és $KN = LM$; 3) $KL = LM$?

98°. Az *ABCD* négyszögben $AB = CD$, $BC = AD$.
Bizonyítsátok be: 1) $B\angle = D\angle$, $A\angle = C\angle$; 2) $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$!

Két szakasz egyenlőségének (vagy párhuzamosságának) bizonyításához:
1) válasszunk ki egy négyszöget, melynek szemben fekvő oldalai az adott szakaszok;
2) bizonyítsuk be, hogy a négyszög paralelogramma;
3) vonjuk le a következtetést: a szakaszok egyenlők (vagy párhuzamosak), mint a paralelogramma szemben fekvő oldalai.
Hasonlóképpen bizonyítható két szög egyenlősége is.

99°. Az $MNKP$ négyszög szemben fekvő oldalai páronként egyenlők. Határozzátok meg:
1) az M szöget, ha $K\angle = 35°$; 2) az MN szakaszt, ha $KP = 5$ cm!

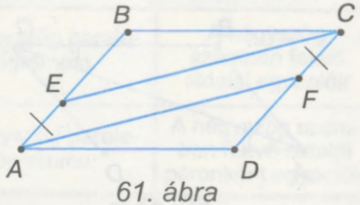
100°. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma, ha:
1) $AB \parallel CD$, $AB = 3$ cm, $CD = 30$ mm;
2) $AD = BC$, $ABC\angle = 60°$, $BAD\angle = 120°$!

101°. Bizonyítsátok be, hogy az a négyszög, melyben két szomszédos oldalhoz tartozó szögek összege 180°, paralelogramma!

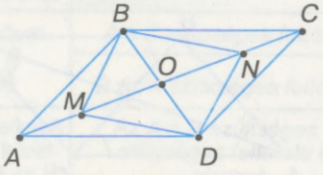
102°. Az $ABCD$ négyszögben $A\angle + B\angle = 180°$ és $B\angle + C\angle = 180°$. Bizonyítsátok be, hogy a szemben fekvő oldalak egyenlők egymással!

103°. Az $ABCD$ négyszögben $A\angle + B\angle = 180°$, $AD = BC$. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma!

104°. Az $ABCD$ paralelogrammában az M pont az AD oldal, az N pont a BC oldal felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy a $BNDM$ négyszög paralelogramma!



61. ábra



62. ábra

105°. Az $ABCD$ paralelogrammában (61. ábra) $AE = CF$. Bizonyítsátok be, hogy a CE és AF szakaszok egyenlők és párhuzamosak!

106°. Az $ABCD$ paralelogrammában az átlók az O pontban metszik egymást. Pótoljátok a 6. táblázat adatait, hogy a feltüntetett következtetés helyes legyen!

6. táblázat

AO	3 cm			0,6 dm
OC		2 dm	35 mm	
BO		4,8 dm		6 cm
OD	5 cm		2,1 cm	
Következtetés	Az $ABCD$ paralelogramma	Az $ACBD$ paralelogramma	Az $ABDC$ paralelogramma	A $DCBA$ paralelogramma

107°. Az $ABCD$ paralelogrammában (62. ábra) $OM = ON$. Bizonyítsátok be, hogy az $MBND$ négyszög paralelogramma!

108°. Az $MBND$ paralelogrammában (62. ábra) $OA = OC$. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ paralelogramma!

109°. Az ABC háromszög BD súlyvonalának meghosszabbítása a $DE = BD$ szakasz. Az E pont a háromszög A és B csúcsával össze van kötve. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCE$ négyszög paralelogramma!

110°. A KLM háromszög LO súlyvonalát az ON szakasszal meghosszabbították, majd megszerkesztették a $KLMN$ négyszöget. Egészítsétek ki a 7. táblázatot, állapítsátok meg a $KLMN$ négyszög fajtáját!

7. táblázat

LO	4 cm	0,05 dm	60 mm	2 cm
ON	40 mm	0,5 dm	6 cm	2 dm
KO	0,3 dm		0,6 dm	
OM		12 mm		2,2 dm

111. **Ha egy négyszög szemben fekvő szögei egyenlők, akkor a négyszög paralelogramma.** Bizonyítsátok be!

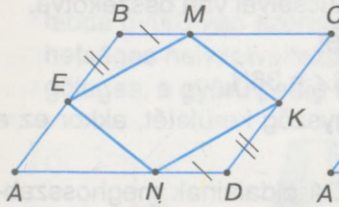
112. Paralelogramma-e a négyszög, ha három szöge:
1) 20°, 60°, 110°; 2) 60°, 60°, 120°; 3) 35°, 145°, 35°?

113. Paralelogramma-e a négyszög, ha két szemben fekvő szögének szögfelezői merőlegesek egy harmadik szög szögfelezőjére?

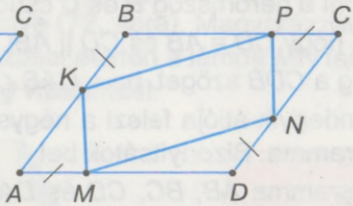
114. Az $ABCD$ paralelogramma két szemben fekvő AB és CD oldalára egymással egyenlő $AB_1 = CD_1$ szakaszok vannak felmérve, és B_1C, B_1D, AD_1, BD_1 egyenesek vannak rajzolva. Bizonyítsátok be, hogy az egyenesek metszése által keletkezett négyszög paralelogramma!

115. Az $ABCD$ paralelogramma A szögének szögfelezője a BC oldalt az M pontban, a C szög szögfelezője pedig az AD oldalt az N pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy az $AMCN$ négyszög paralelogramma!

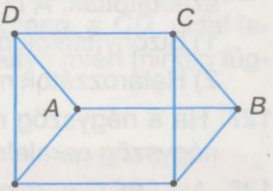
116. Az $ABCD$ paralelogramma AB, BC, CD, AD oldalain E, M, K, N pontok úgy vannak felvéve, hogy $BM = DN$, $BE = DK$ (63. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az $EMKN$ négyszög paralelogramma!



63. ábra



64. ábra



65. ábra

117. Az $ABCD$ paralelogramma oldalaira úgy vannak felmérve az AM, DN, CP, BK egyenlő szakaszok, amint azt a 64. ábra mutatja. Bizonyítsátok be, hogy az $MNPK$ négyszög paralelogramma!

118. Az $ABCD$ paralelogrammán kívül A hegyesszöggel ABE és CDF egyenlő oldalú háromszögek vannak szerkesztve. Bizonyítsátok be, hogy az $AECF$ négyszög paralelogramma!

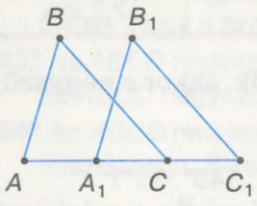
119. Az $ABCD$ és az $ABEF$ paralelogrammák (65. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $DF = CE$ és $DF \parallel CE$!

120. Az $ABC\Delta = A_1B_1C_1\Delta$ (66. ábra). Határozzátok meg a B és a B_1 pontok közötti távolságot, ha:

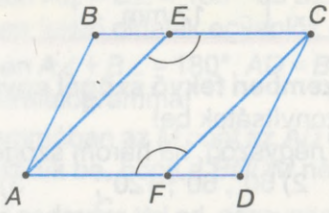
1) $AA_1 = 3$ cm; 2) $AC = 10$ cm, $A_1C = 6$ cm; 3) $AC_1 = 20$ cm, $A_1C = 12$ cm!

121. Az $ABCD$ paralelogramma BC és AD oldalain az E és F pontokat úgy vették fel, hogy $AEC\angle = AFC\angle$ (67. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az $AECF$ négyszög paralelogramma!

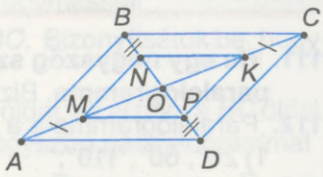
122. Ha egy négyszög két szemben fekvő oldala párhuzamos, az egyik átló pedig felezi a másik átlót, akkor a négyszög paralelogramma. Bizonyítsátok be!



66. ábra



67. ábra



68. ábra

123. Bizonyítsátok be, hogy a paralelogramma átlói metszéspontján keresztül két egyenest húzva az egyeneseknek az oldalakkal való metszéspontjai egy paralelogramma csúcsai!

124. Az $ABCD$ paralelogramma átlói az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az $MNPK$ paralelogramma olyan négyszög, melynek csúcsai az OA, OB, OC és OD szakaszok felezőpontjai!

125. Az $ABCD$ paralelogrammában (68. ábra) $AM = KC$, $BN = PD$. Bizonyítsátok be, hogy $MP = NK$ és $MP \parallel NK$!

126. Az ABC háromszög AO súlyvonalát az $OD = AO$ szakasszal meghosszabbították. A D pont a háromszög B és C csúcsaival van összekötve.

1) Bizonyítsátok be, hogy $CD = AB$ és $CD \parallel AB$!

2) Határozzátok meg a CDB szöget, ha a $CAB\angle = 36°$!

127.* Ha a négyszög mindegyik átlója felezi a négyszög kerületét, akkor ez a négyszög paralelogramma. Bizonyítsátok be!

128.* Az $ABCD$ paralelogramma AB, BC, CD és DA oldalainak meghosszabbításain úgy vették fel a K, P, M, E pontokat, hogy $AK = BP = CM = DE$. Bizonyítsátok be, hogy a $KPME$ négyszög paralelogramma!

129.* Az $ABCD$ paralelogramma AC átlóján a K és M pontokat úgy vették fel, hogy $AKB\angle = CMD\angle$. Bizonyítsátok be, hogy a $KBMD$ négyszög paralelogramma!

130.* Az ABC szög belső tartományának K pontján át úgy rajzoljatok egyenest, hogy a szög szárai között levő szakaszt felezze a K pont!

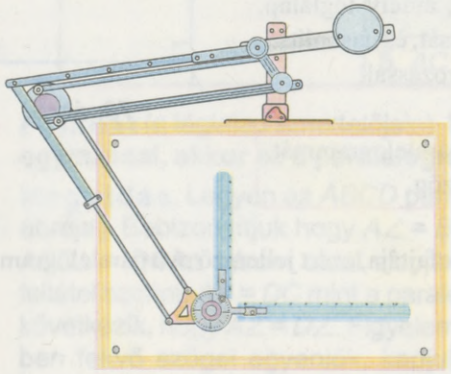
131.* A paralelogramma tompaszögeinek csúcsából magasságokat húztak az oldalakra. Paralelogramma csúcsai lesznek-e a négy magasság végpontjai?

132.* A paralelogramma oldalaihoz felező merőlegeseket húztak, amelyek a szemben fekvő oldalakat, vagy azok meghosszabbításait a *K*, *L*, *M*, *N* pontokban metszik. Bizonyítsátok be, hogy a *KLMN* négyszög paralelogramma!

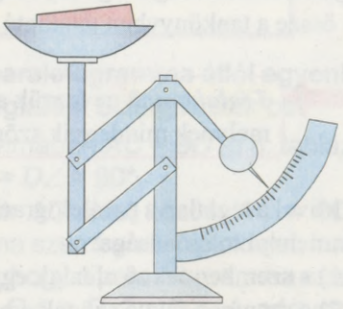
133.* Ha a négyszög szemben fekvő szögeinek csúcsai egyenlő távolságra vannak a megfelelő átlóktól, akkor a négyszög paralelogramma. Bizonyítsátok be!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

134. Magyarázzátok meg a mechanikus fejes vonalzó (69. ábra) és a mérleg (70. ábra) működési elvét!

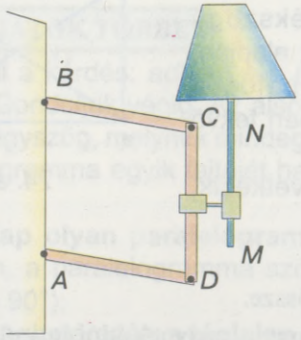


69. ábra

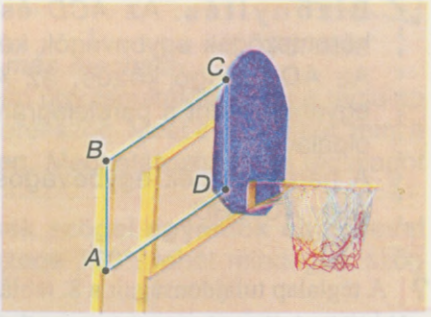


70. ábra

135. A 71. és 72. ábra a magasság szabályozására szolgáló csuklós szerkezeteket ábrázol. Az *ABCD* paralelogramma egyik oldala (az *AB*) rögzített, a *CD* oldalhoz mereven egy lámpa, (71. ábra), valamint egy kosárlabda gyűrű van szerelve (72. ábra). Magyarázzátok meg, a *CD* oldal lehetséges helyzetváltozásai esetén a lámpa *MN* tengelye miért mindig függőleges, a gyűrű pedig vízszintes!



71. ábra

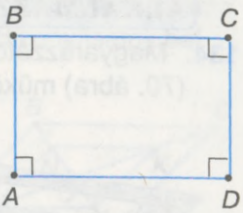


72. ábra



4. §. A TÉGLALAP

A paralelogrammáknak a háromszögekhez hasonlóan különböző fajtái vannak. A téglalap a paralelogramma egyik típusa. A 73. ábrán egy *ABCD* paralelogrammát láttok, amely téglalap. Fogalmazzátok meg a téglalap meghatározását, és hasonlítsátok össze a tankönyvben található meghatározással!



73. ábra

Téglalapnak nevezzük az olyan paralelogrammát, melynek mindegyik szöge derékszög.

Mivel a téglalap a paralelogramma egyik fajtája, ezért jellemző rá a paralelogramma valamennyi tulajdonsága:

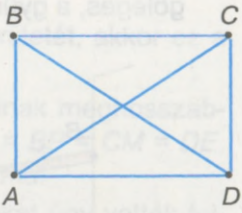
1) a szemben fekvő oldalak egyenlők;
2) a szemben fekvő szögek egyenlők;
3) az átlók metszéspontja felezi az átlókat.

Tantétel (a téglalap átlóinak tulajdonsága).
A téglalap átlói egyenlők egymással.

Adva: *ABCD* téglalap.
AC és *BD* átlók (74. ábra).

Bebizonyítani: *AC* = *BD*.

Bizonyítás. Az *ACD* és *DBA* derékszögű háromszögek egybevágók két befogójuk alapján. Az *AD* befogó közös, az *AB* és *DC* befogók egyenlők, mint a paralelogramma szemben fekvő oldalai.
A háromszögek egybevágóságából következik, hogy *AC* = *BD*.

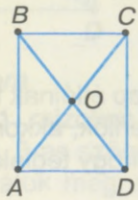


74. ábra

? A téglalap tulajdonságait a 8. táblázat foglalja össze.

Állíthatjuk-e, hogy téglalap az olyan paralelogramma, melynek átlói egyenlők? Igen. Ez az állítás azonban külön bizonyítást igényel.

8. táblázat

ABCD téglalap	Tulajdonság
	paralelogramma
	1. $AB = DC$, $AD = BC$
	2. $A\angle = C\angle$, $B\angle = D\angle$
	3. $AO = OC$, $BO = OD$
	4. $A\angle + B\angle = 180°$, $A\angle + D\angle = 180°$
	Speciális
	5. $AC = DB$

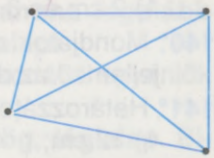
Feladat (a téglalap ismertetőjele). **Ha egy paralelogramma átlói egyenlők egymással, akkor ez a paralelogramma téglalap.** Bizonyítsátok be!

Megoldás. Legyen az *ABCD* paralelogrammában $AC = BD$ (a 8. táblázat ábrája). Bebizonyítjuk hogy $A\angle = B\angle = C\angle = D\angle = 90°$.

$ABD\Delta = DCA\Delta$ három oldal alapján. Bennük *AD* oldal közös, $AC = BD$ a feltétel szerint. $AB = DC$ mint a paralelogramma szemben fekvő oldalai. Innen következik, hogy $A\angle = D\angle$. Figyelembe véve, hogy a paralelogramma szemben fekvő szögei egyenlők, kapjuk: $A\angle = C\angle = D\angle = B\angle$. A négyszög szögeinek tulajdonsága alapján $A\angle + C\angle + D\angle + B\angle = 360°$. Mivel $A\angle = C\angle = D\angle = B\angle = 360° : 4 = 90°$, vagyis a paralelogramma téglalap.

Hogy megállapítsuk, téglalap-e egy adott paralelogramma, be kell bizonyítani: vagy azt, hogy mindegyik szöge derékszög (a téglalap meghatározása), vagy azt, hogy átlói egyenlők egymással (a téglalap ismertetőjele).

? Állíthatjuk-e, hogy az a négyszög, melynek átlói egyenlők egymással, téglalap? Nem (lásd a 75. ábrát). Ellenőrizni kell, teljesül-e a paralelogramma valamelyik tulajdonsága. Például: az átlók metszéspontja felezi-e az átlókat.



75. ábra

TUDJATOK TÖBBET!

Felmerül a kérdés: *adható-e a téglalapnak más meghatározás?* Gondoljuk végig. Az alsó osztályokban úgy tanultátok, hogy a téglalap olyan négyszög, melynek mindegyik szöge derékszög. Most a téglalapot, mint a paralelogramma egyik fajtáját határoztuk meg. Meghatározhatjuk a téglalapot így is:

a téglalap olyan paralelogramma, melynek szögei egyenlők egymással (valóban, a paralelogramma szögeinek összege 360°, tehát mindegyik szög mértéke 90°).

Másik meghatározás: **a téglalap olyan paralelogramma, melynek van derékszöge** (a paralelogramma szomszédos szögeinek összege 180°, a szemben

fekvő szögek pedig egyenlők. Ezért ha a paralelogramma egy szöge derékszög, akkor valamennyi szöge derékszög.)
A téglalap felsorolt meghatározásai *egyenértékűek*.
Tehát **egy és ugyanazon fogalomnak különböző meghatározásai lehetnek.**

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

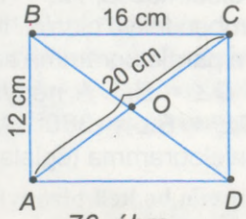
1. Mit nevezünk téglalapnak?
2. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a téglalap átlóinak tulajdonságát!
3. Bizonyítsátok be: ha a paralelogramma átlói egyenlők, akkor az téglalap!
4. Hogyan állapítható meg egy paralelogrammáról, hogy téglalap?

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

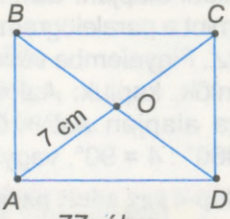
136'. Az *ABCD* négyszög téglalap (76. ábra). A rajzon feltüntetett adatok alapján határozzátok meg:
1) *AD*, *DC*; 2) *BD*; 3) *AO*, *OC*, *BO*, *OD*!

137'. A 77. ábrán feltüntetett adatok alapján határozzátok meg:
1) a téglalap átlóit; 2) a téglalap átlóinak összegét!

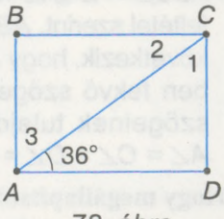
138'. Adott *ABCD* téglalap (78. ábra). A rajzon feltüntetett adat alapján számítsátok ki az 1-es, 2-es, 3-as szögek mértékét!



76. ábra



77. ábra



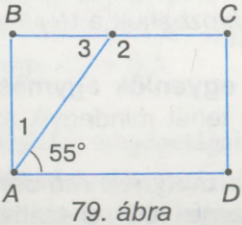
78. ábra

139'. Számítsátok ki a téglalap kerületét, ha oldalai:
1) 2 cm és 3 cm; 2) 0,4 dm és 0,5 dm; 3) 10 mm és 12 mm!

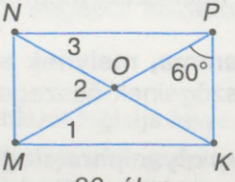
140'. Mondjatok olyan tulajdonságot, amelyik jellemző a téglalapra, de nem jellemző az olyan paralelogrammára, amelyik nem téglalap!

141°. Határozzátok meg a téglalap átlóit, ha összegük:
1) 12 cm; 2) 6 cm; 3) 18 mm!

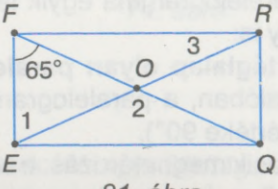
142°. Az *ABCD* paralelogramma átlóinak metszéspontja *O*. Bizonyítsátok be, hogy:
1) az *AOD*, *BOC*, *AOB* és *DOC* háromszögek egyenlő szárúak;
2) $AOB\Delta = COD\Delta$, $BOC\Delta = DOA\Delta$!



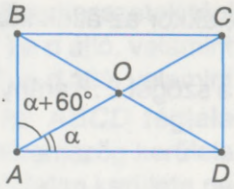
79. ábra



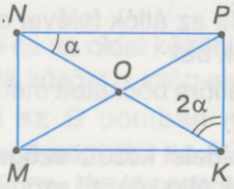
80. ábra



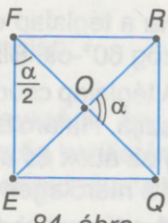
81. ábra



82. ábra



83. ábra



84. ábra

143°. A 79 – 81. rajzokon téglalapok vannak ábrázolva. Határozzátok meg az 1-es, 2-es, 3-as szögek mértékét!

144°. Határozzátok meg a 82 – 84. rajzokon ábrázolt téglalapok átlói közötti szögek fokmértékét!

145°. Egy paralelogramma egyik szöge sem hegyesszög. Bizonyítsátok be, hogy ez a paralelogramma téglalap!

146°. A téglalap átlója d, és az oldallal 30°-os szöget alkot. Határozzátok meg a téglalap kisebbik oldalát, ha: 1) $d = 4$ cm; 2) $d = 14$ mm; 3) $d = 0{,}44$ dm!

147°. A téglalap kisebbik oldala a. Határozzátok meg az átlókat, ha azok 60°-os szögben metszik egymást, és: 1) $a = 10$ cm; 2) $a = 0{,}25$ dm; 3) $a = 7$ mm!

148°. A téglalap oldalai a és b, kerülete P. Töltsétek ki a 9. táblázatot!

9. táblázat

a	6 cm	4 cm		10 cm	9 cm
b	12 cm		5 cm		7 cm
P		32 cm	30 cm	44 cm	

149°. Számítsátok ki a téglalap kerületét, ha:
1) egyik oldala 4 cm, a másik háromszor nagyobb;
2) egyik oldala 10 cm, a másik kétszer kisebb;
3) egyik oldala 12 cm, a másik 4 cm-rel nagyobb!

150°. Bizonyítsátok be, hogy amennyiben a paralelogramma legalább egyik szöge derékszög, akkor a paralelogramma téglalap!

151°. Ha a paralelogramma legalább egy szöge derékszög, akkor átlói egyenlők egymással. Bizonyítsátok be!

152. Az olyan négyszög, melynek három szöge derékszög, téglalap. Bizonyítsátok be!

153. Ha egy négyszög szögei egyenlők egymással, akkor a négyszög téglalap. Bizonyítsátok be!

154. Ha a paralelogramma szemben fekvő szögeinek összege 180°, akkor ez a paralelogramma téglalap. Bizonyítsátok be!

155. Bizonyítsátok be, hogy amennyiben a paralelogramma egy oldalához tartozó szögek egyenlők egymással, akkor a paralelogramma téglalap!

156. A paralelogramma átlói egyenlő szögeket alkotnak az oldalakkal. Bizonyítsátok be, hogy ez a paralelogramma téglalap!

157. A téglalap átlói közötti tompaszög 120°-os. Bizonyítsátok be, hogy az átlók hossza kétszerese a kisebbik oldalnak!

158. Ha a téglalap egyik oldala az átlók felével egyenlő, akkor az átlók közötti szög 60°-os. Bizonyítsátok be!

159. A téglalap csúcsából az átlóra bocsátott merőleges a szöget 2 : 3 arányban osztja. Határozzátok meg:
1) az átlók és a téglalap oldalai közötti szöget;
2) a merőleges és a másik átló közötti szöget!

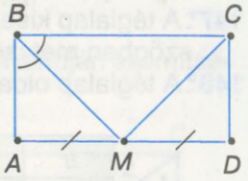
160. A négyszögben az átlók metszéspontja felezi az átlókat, egy szög pedig derékszög. Bizonyítsátok be, hogy ez a négyszög téglalap!

161. A téglalap kerülete 48 cm. Határozzátok meg az oldalakat, ha:
1) a két oldal aránya 2 : 3;
2) a két szemben fekvő oldal közötti távolság 10 cm;
3) az átlók metszéspontja az oldaltól 4 cm távolságra van!

162. A téglalap kerülete P. Határozzátok meg a téglalap belső tartományának tetszőleges pontja és az oldalak közötti távolságok összegét, ha:
1) $P = 12$ cm; $P = 8{,}6$ cm!

163. Határozzátok meg az $ABCD$ téglalap kerületét, ha az A szög szögfelezője a BC oldalt m és n szakaszokra osztja, és: 1) $m = 3$ cm, $n = 5$ cm; 2) $m = 0{,}2$ dm, $n = 3$ cm!

164. Az $ABCD$ téglalapban a BM szögfelező (85. ábra) felezi az AD oldalt. Bizonyítsátok be, hogy CM a C szög szögfelezője!



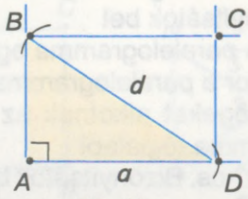
85. ábra

165. Bizonyítsátok be, hogy amennyiben a téglalapban a szögfelező két egyenlő részre osztja az általa metszett oldalt, akkor a téglalap egyik oldala kétszer nagyobb a másiknál!

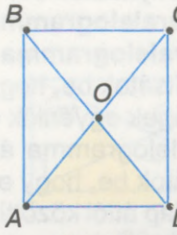
166. A téglalapban az egyik szög szögfelezője két egyenlő részre osztja az általa metszett oldalt. Határozzátok meg a téglalap kerületét, ha a kisebbik oldal: 1) 15 cm; 2) 3,8 dm!

167. A 86. ábra alapján állítsátok össze a téglalap szerkesztésének tervét, ha adva van a oldala és d átlója!

A paralelogrammához hasonlóan a téglalap szerkesztésekor is segédháromszöget szerkesztünk, majd megszerkesztjük a téglalapot.
A segédháromszög lehet:
vagy derékszögű háromszög (86. ábra),
vagy egyenlő szárú háromszög (87. ábra).



86. ábra



87. ábra

168. Szerkesszetek téglalapot:
1) a d átló, valamint az átló és az oldal közötti α szög alapján;
2) a d átló, valamint az átlók közötti α szög alapján!

169.* Az $ABCD$ téglalap átlói az O pontban metszik egymást. Az ABD háromszög kerülete 12 cm-rel nagyobb az AOB háromszög kerületénél, a téglalap kerülete pedig 50,2 cm. Határozzátok meg a téglalap oldalait!

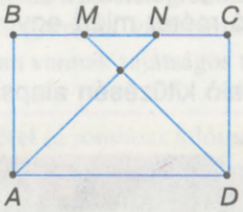
170.* **Bizonyítsátok be: ha a négyszög átlói egyenlők egymással, és metszéspontjukban felezik egymást, akkor a keletkezett négyszög téglalap!**

Annak bizonyításához, hogy egy négyszög téglalap, be kell bizonyítani: vagy azt, hogy a négyszög paralelogramma, a paralelogramma pedig téglalap, vagy azt, hogy a négyszög három szöge derékszög.

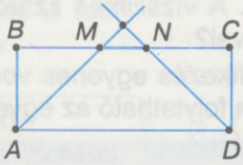
171.* Az olyan négyszög, melynek szemben fekvő oldalai egyenlők egymással, és egyenlők az átlóik is, akkor a négyszög téglalap. Bizonyítsátok be!

172.* Bizonyítsátok be: ha egy négyszögben az átlók egyenlők egymással, szemben fekvő oldalaik párhuzamosak és egyenlők, akkor a négyszög téglalap!

173.* Az a és b oldalú $ABCD$ téglalap A és D szögének szögfelezői a BC oldalt M és N pontokban metszik (88. és 89. ábra). Határozzátok meg az MN szakasz hosszát!



88. ábra



89. ábra

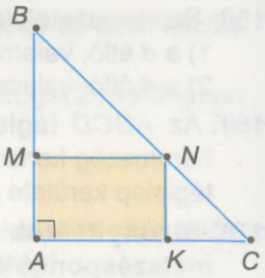
174.* **Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából húzott súlyvonal az átfogó felével egyenlő!**

Két szakasz egyenlőségének bizonyításához be kell bizonyítani: vagy azt, hogy egy téglalap (paralelogramma) szemben fekvő oldalai, vagy azt, hogy egy téglalap átlói, vagy azt, hogy egy téglalap (paralelogramma) átlójának olyan részei, melyekre a másik átlóval való metszéspont osztja az átlókat.

175.* A derékszögű háromszög 6 cm hosszúságú átfogójának felezőpontján keresztül a befogókkal párhuzamos két egyenes van rajzolva. Határozzátok meg az így keletkezett téglalap átlóit!

176.* Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög alapján felvett pont és a két oldal közötti távolságok összege egyenlő az alapon fekvő szögből húzott magassággal!

177.* Az egyenlő szárú derékszögű háromszögbe olyan téglalapot írtak, hogy egyik szögük közös (90. ábra).
1) Bizonyítsátok be, hogy a téglalap kerülete nem függ csúcsának az átfogón elfoglalt helyzetétől!
2) Számítsátok ki a téglalap kerületét, ha a háromszög befogója 5 cm!



90. ábra

178.* Szerkesszetek téglalapot:
1) d átlója és két nem egyenlő oldala s összege alapján;
2) d átlója és oldalaik m különbsége alapján!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

179. Két A és B pont közötti távolság meghatározására a terepen, melyek között átjárhatatlan akadály van (91. ábra), szerkesszetek BAD és ABC derékszögeket. Ezután a szögek szárára mérjetek AD és BC egyenlő távolságokat. A DC távolság egyenlő lesz a keresett AB távolsággal. Miért?

180. Milyen módszerekkel ellenőrizhető, hogy egy négyszög alakú tárgy téglalap? A feleletet magyarázzátok meg!

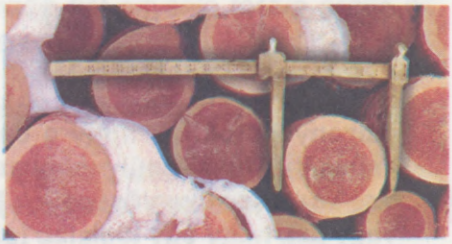
181. Egy tanuló négy, páronként egyenlő lécből téglalap alakú rámát készített. A téglalap pontosságának ellenőrzése céljából ellenőrizte átlói egyenlőségét. Elegendő-e ennyi ellenőrzés?

182. A 92. ábrán a farönkök átmérőjének meghatározására szolgáló eszköz látható. A vízszintes száron leolvasható méret miért egyenlő a rönk átmérőjével?

183. Az építkezés egyenes vonal terepen való kitűzésén alapszik (93. ábra). Hogyan folytatható az egyenes?



91. ábra

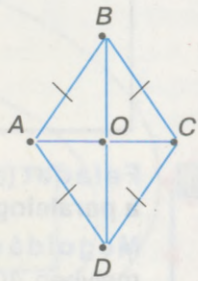

92. ábra


93. ábra



5. § A ROMBUSZ. A NÉGYZET

? Egy paralelogramma oldalai lehetnek-e egyenlők egymással? Lehetnek. A 94. ábrán az $ABCD$ paralelogrammában $AB = BC = CD = AD$. Ez a paralelogramma egy újabb fajtája, a rombusz.

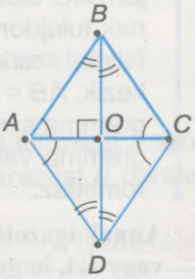


94. ábra

Azt a paralelogrammát, melynek oldalai egyenlők egymással, ***rombusznak*** nevezzük.

? Állíthatjuk-e, hogy rombusz az a paralelogramma, melynek szomszédos oldalai egyenlők egymással? Igen, mert ebből következik valamennyi oldal egyenlősége a paralelogramma tulajdonsága alapján: a paralelogramma szemben fekvő oldalai egyenlők.

Mivel a rombusz a paralelogramma egyik fajtája, ezért magán viseli a paralelogramma valamennyi tulajdonságát. A rombusznak azonban vannak sajátságos tulajdonságai is.



95. ábra

Tantétel (a rombusz átlóinak tulajdonsága).
A rombusz átlói kölcsönösen merőlegesek egymásra.
A rombusz átlói felezik a rombusz szögeit.

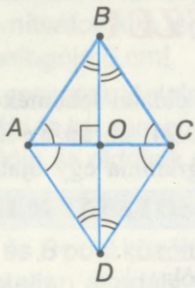
Adva: $ABCD$ rombusz (95. ábra).
O a rombusz AC és BD átlójának felezőpontja.

Bebizonyítani: $AC \perp BD$;
$ABD\angle = CBD\angle = ADB\angle = CDB\angle$;
$BAC\angle = DAC\angle = BCA\angle = DCA\angle$.

Bizonyítás. A rombusz meghatározása értelmében $AB = BC$, ezért az ABC háromszög egyenlő szárú. Mivel az $ABCD$ rombusz paralelogramma, ezért $AO = OC$. Ebből következik, hogy BO az ABC egyenlő szárú háromszög súlyvonala, egyben a háromszög magassága és szögfelezője. Következésképpen $AC \perp BD$ és $ABD\angle = CBD\angle$.
Hasonlóan bizonyítjuk, hogy a BD átló felezi a D szöget, az AC átló pedig az $ABCD$ rombusz A és C szögét.

A rombusz tulajdonságait a 10. táblázat foglalja össze.

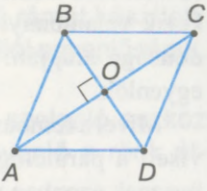
10. táblázat

ABCD rombusz	Tulajdonság
	**paralelogramma**
	1. $AB = DC$, $AD = BC$
	2. $A\angle = C\angle$, $B\angle = D\angle$
	3. $AO = OC$, $BO = OD$
	4. $A\angle + B\angle = 180°$, $A\angle + D\angle = 180°$
	sajátságos
	5. $AC \perp BD$
	6. $ABD\angle = CBD\angle = ADB\angle = CDB\angle$, $BAC\angle = DAC\angle = BCA\angle = DCA\angle$

Feladat (a rombusz ismertetőjele). **Bizonyítsátok be, hogy rombusz az a paralelogramma, melynek átlói merőlegesek egymásra.**

Megoldás. Legyen *ABCD* az adott paralelogramma, melyben $AC \perp BD$ (96. ábra).

Bebizonyítjuk, hogy *ABCD* rombusz.

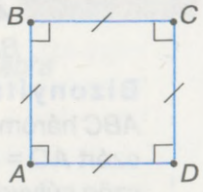


96. ábra

$AOB\Delta = AOD\Delta$ két oldal, és a közöttük fekvő szög alapján. *AO* oldal közös, $OB = OD$ a paralelogramma átlóinak tulajdonságából eredően. $AOB\angle = AOD\angle = 90°$ a feltétel szerint. A háromszögek egybevágóságából következik: $AB = AD$. Akkor $AB = CD$ és $AD = BC$ a paralelogramma szemben fekvő oldalainak tulajdonsága alapján. Tehát a paralelogramma valamennyi oldala egyenlő egymással, ezért a paralelogramma rombusz.

Annak igazolására, hogy egy paralelogramma rombusz, be kell bizonyítani: vagy azt, hogy oldalai egyenlők egymással (a rombusz meghatározása), vagy azt, hogy átlói merőlegesek egymásra (a rombusz ismertetőjele).

Azt a téglalapot, melynek oldalai egyenlők, ***négyzetnek*** nevezzük.



97. ábra

A 97. ábrán *ABCD* négyzet látható.

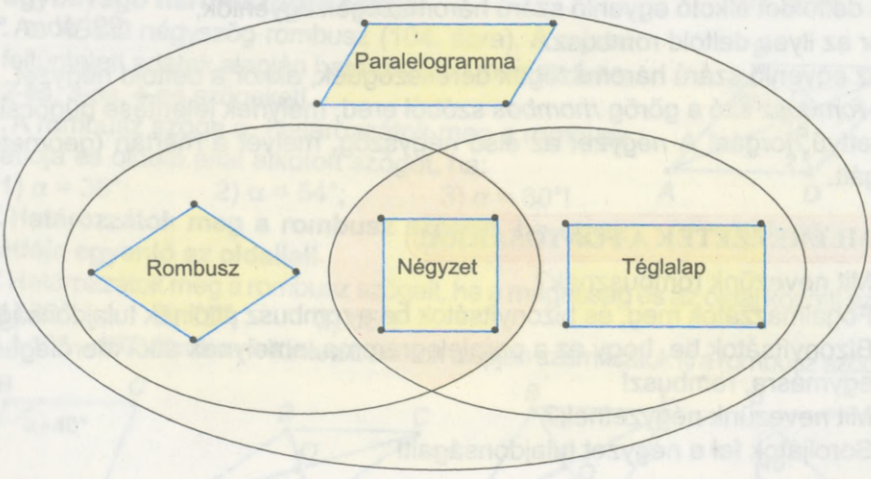
A négyzetnek más meghatározása is lehet: azt a rombuszt, melynek mindegyik szöge derékszög, négyzetnek nevezzük; azt a téglalapot, melynek oldalai egyenlők egymással, négyzetnek nevezzük; azt a paralelogrammát, melynek oldalai egyenlők egymással és valamennyi szöge derékszög, négyzetnek nevezzük. Tehát a négyzetre jellemzőek a paralelogramma, a téglalap és a rombusz összes tulajdonságai. Felsoroljuk a négyzet tulajdonságait.

1) A négyzet szemben fekvő oldalai és szemben fekvő szögei egyenlők. A négyzet átlóinak metszéspontja felezi az átlókat (a paralelogramma tulajdonsága).

2) A négyzet átlói egyenlők egymással (a téglalap tulajdonsága).

3) A négyzet átlói kölcsönösen merőlegesek és felezik a négyzet szögeit (a rombusz tulajdonságai).

A négyzet a rombusz, a téglalap és a paralelogramma sajátos fajtája. A rombusz és a téglalap a paralelogramma külön fajtái. A paralelogrammák fajtái közötti összefüggést a 98. ábra mutatja.



98. ábra

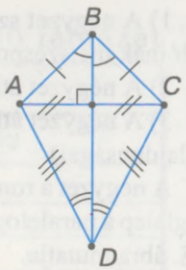
TUDJATOK TÖBBET!

1. Vizsgáljátok meg a paralelogrammák rendszerezésének táblázatát a szomszédos oldalak és szögek alapján. Ajánljatok saját rendszerezést a paralelogramma tanult fajtáival kapcsolatban.

11. táblázat

Szögek szerint	Oldalak szerint	
	A szomszédos oldalak egyenlők	A szomszédos oldalak nem egyenlők
A szögek derékszögek	Négyzet	Téglalap
A szögek nem derékszögek	Rombusz	Paralelogramma

2. A paralelogrammán kívül a négyszögeknek van egy másik fajtája, a *deltoid*. Ilyen alakzatot kapunk, ha két *ABC* és *ADC*, *AC* egyenlő alapú, egyenlő szárú háromszöget úgy illesztünk össze, amint az a 99. ábrán látható.



99. ábra

A deltoid tulajdonságai az egyenlő szárú háromszög tulajdonságaiból erednek. Például átlói merőlegesek egymásra, az egyik átló felezi a szögeket és a másik átlót. A rajz alapján fogalmazzátok meg a deltoid egyéb tulajdonságait!

Ha a deltoidot alkotó egyenlő szárú háromszögek egyenlők, akkor az ilyen deltoid rombusz.

Ha az egyenlő szárú háromszögek derékszögűek, akkor a deltoid négyzet.

3. A *rombusz* szó a görög *rhombòs* szóból ered, melynek jelentése búgócsiga, pörgettyű, forgás. A *négyzet* az első négyszög, melyet a mértan (geometria) vizsgált.

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Mit nevezünk rombusznak?
2. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a rombusz átlóinak tulajdonságait!
3. Bizonyítsátok be, hogy az a paralelogramma, amelynek átlói merőlegesek egymásra, rombusz!
4. Mit nevezünk négyzetnek?
5. Soroljátok fel a négyzet tulajdonságait!

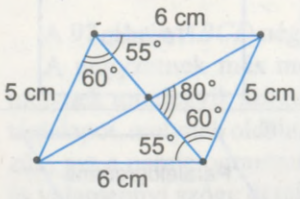
OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

184'. Helyesen mutatja-e a 100. ábra a rombusz oldalainak hosszúságát és a szögek fokmértékét? A feleletet magyarázzátok meg!

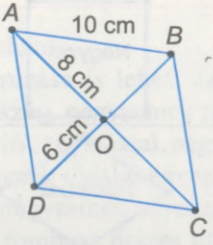
185'. Az *ABCD* négyszög rombusz (101. ábra). A rajzon feltüntetett adatok alapján határozzátok meg:
1) *BC*, *AD*, *DC*; 2) *AC*, *BD*!

186'. Az *ABCD* négyszög rombusz (102. ábra). A rajzon feltüntetett adatok alapján határozzátok meg az 1-es, 2-es és 3-as szögeket!

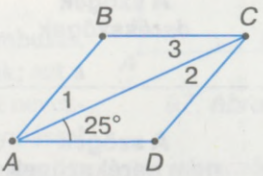
187'. Soroljatok fel olyan tulajdonságokat, melyek a paralelogrammák közül csak a rombuszra jellemzők!



100. ábra

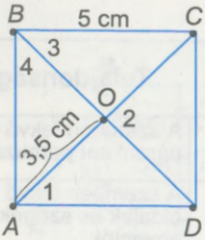


101. ábra



102. ábra

188'. A 103. ábrán feltüntetett adatok alapján határozzátok meg: 1) a négyzet oldalait; 2) a négyzet átlóit; 3) az 1-es, 2-es, 3-as, 4-es szögeket!



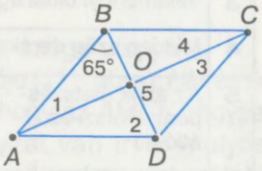
103. ábra

189°. Határozzátok meg a rombusz oldalait, ha kerülete: 1) 12 cm; 2) 2,4 dm; 3) 280 mm!

190°. Bizonyítsátok be, hogy az átlók a rombuszt négy egybevágó derékszögű háromszögre osztják!

191°. Bizonyítsátok be, hogy az átló a rombuszt két egybevágó háromszögre osztja!

192°. Az *ABCD* négyszög rombusz (104. ábra). A rajzon feltüntetett adatok alapján határozzátok meg az 1-es, 2-es, 3-as, 4-es szögeket!



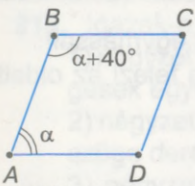
104. ábra

193°. A rombusz szöge α. Határozzátok meg a rombusz átlója és oldala által alkotott szöget, ha: 1) $\alpha = 36°$; 2) $\alpha = 54°$; 3) $\alpha = 60°$!

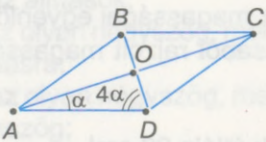
194°. Határozzátok meg a rombusz szögeit, ha egyik átlója egyenlő az oldallal!

195°. Határozzátok meg a rombusz szögeit, ha a magasság és az oldal közötti szög: 1) 30°; 2) 15°; 3) 65°!

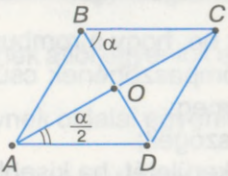
196°. A 105–107. ábrákon feltüntetett adatok alapján számítsátok ki a rombusz szögeit!



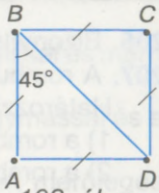
105. ábra



106. ábra



107. ábra



108. ábra

197°. A rombusz szöge 60°, kisebbik átlója *d*. Számítsátok ki a rombusz kerületét, ha: 1) $d = 10$ cm; 2) $d = 3{,}2$ dm; 3) $d = 45$ mm!

198°. Határozzátok meg a négyzet kerületét, ha átlóinak metszéspontja az oldaltól *n* távolságra van, és: 1) $n = 8$ cm 2) $n = 0{,}3$ dm; 3) $n = 21$ mm!

199°. A négyzet átlója *d*. Oldala egy másik négyzet átlója. Számítsátok ki a másik négyzet oldalát, ha: 1) $d = 6$ cm; 2) $d = 29$ mm; 3) $d = 1{,}5$ dm!

200°. Bizonyítsátok be, hogy a 108. ábrán látható *ABCD* négyszög négyzet!

201°. Rajzoljátok át a munkafüzetbe a 12. táblázatot! A táblázatban tegyetek „+” jelet, ha az adott mértani alakzatra vonatkozik az adott tulajdonság!

202. Az olyan rombusz, melynek egy szöge derékszög, négyzet. Bizonyítsátok be!

203. Bizonyítsátok be, hogy rombusz az olyan négyszög, melynek oldalai egyenlők egymással!

204. Az olyan paralelogramma, melynek átlói felezik a szögeket, rombusz. Bizonyítsátok be!

205. Határozzátok meg a rombusz szögeit, ha kerülete 36 cm, magassága pedig 4,5 cm!

12. táblázat

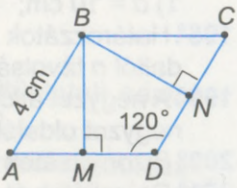
	Tulajdonság	Alakzat			
		Paralelogramma	Téglalap	Rombusz	Négyzet
1	A szemben fekvő oldalak páronként párhuzamosak				
2	A szemben fekvő oldalak és szögek egyenlők				
3	Valamennyi oldal egyenlő				
4	Minden szög derékszög				
5	Az átlók metszéspontja felezi az átlókat				
6	Az átlók egyenlők				
7	Az átlók kölcsönösen merőlegesek egymásra				
8	Az átlók felezik a szögeket				

206. Bizonyítsátok be, hogy a rombusz magasságai egyenlők egymással!

207. A rombusz tompaszögének csúcsából rajzolt magasság felezi az oldalt. Határozzátok meg:
1) a rombusz szögeit;
2) a rombusz kerületét, ha kisebbik átlója 20 cm!

208. Határozzátok meg a rombusz szögeit, ha az azonos csúcsból húzott magasság és átló közötti szög: 1) 35°; 2) 20°; 3) 40°!

209. Az $ABCD$ rombusz oldalának hossza 4 cm, a $D\angle = 120°$ (109. ábra).
1) Határozzátok meg az AM, MD, BM szakaszok hosszát!
2) Bizonyítsátok be, hogy az $MBN\Delta$ egyenlő oldalú!

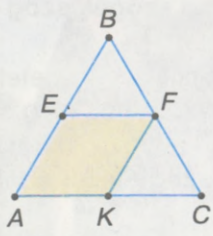


109. ábra

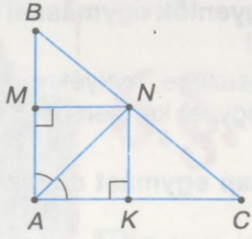
210. Határozzátok meg a rombusz szögeit, ha oldalának az átlókkal alkotott szögei úgy aránylanak, mint:
1) 2 : 3; 2) 2 : 7; 3) 1 : 2!

211. A rombusz magassága 8-szor kisebb kerületénél. Határozzátok meg a rombusz szögeit!

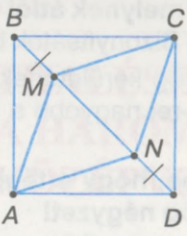
212. Az egyenlő oldalú háromszögbe rombusz van írva, melynek közös szöge van a háromszöggel (110. ábra).
1) Határozzátok meg a rombusz kerületét, ha a háromszög kerülete 24 cm!
2) Bizonyítsátok be, hogy a rombusz oldala a háromszög oldalának felével egyenlő!
3) Számítsátok ki a szakaszok hosszát, melyekre a rombusz csúcsa osztja a háromszög oldalát!



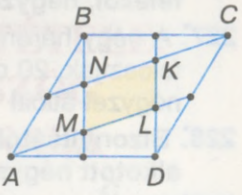
110. ábra



111. ábra



112. ábra



113. ábra

213. Szerkesszetek rombuszt: 1) d_1 és d_2 átlói alapján;
2) a oldala és d átlója alapján; 3) a oldala és α szöge alapján!

214. Az AN az ABC háromszög A derékszögének szögfelezője (111. ábra); NM és NK a befogókra bocsátott merőlegesek. Bizonyítsátok be, hogy az $AMNK$ négyzet!

215. Az egyenlő szárú derékszögű háromszögbe négyzet van írva, melynek közös szöge van a háromszöggel. Határozzátok meg a négyzet kerületét, ha a háromszög befogója: 1) 8 cm; 2) 29 mm; 3) 0,41 dm!

216. Bizonyítsátok be, hogy a négyzet olyan rombusz, melynek átlói egyenlők egymással!

217. Az $ABCD$ négyzet BD átlójára $BM = DN$ szakaszok vannak felmérve (112. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az $AMCN$ négyszög rombusz!

218. Igazak-e az állítások:
1) négyzet az olyan négyszög, melynek átlói egyenlők egymással és merőlegesek egymásra;
2) négyzet az olyan négyszög, melynek oldalai egyenlők egymással és egy szöge derékszög;
3) négyzet az olyan négyszög, melynek átlói kölcsönösen merőlegesek egymásra, és metszéspontjukban felezik egymást?

219. Szerkesszetek négyzetet: 1) a oldala alapján; 2) d átlója alapján!

220*. Bizonyítsátok be, hogy a rombusz átlója felezi a rombusz egy csúcsából húzott magasságok közötti szöget!

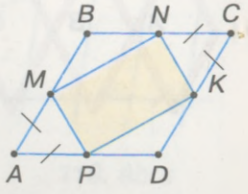
221*. A rombusz csúcsából húzott magasságok közötti szög 30°. Határozzátok meg a rombusz szögeit!

222*. A rombusz szemben fekvő szögeinek csúcsai úgy vannak összekötve az oldalak felezőpontjával, amint azt a 113. ábra mutatja. Bizonyítsátok be, hogy a keletkezett $MNKL$ négyszög paralelogramma!

223*. A rombusz átlóinak metszéspontjából merőlegesek vannak húzva az oldalakra. Bizonyítsátok be, hogy a merőlegesek talppontjai egy téglalap csúcsai!

224*. Bizonyítsátok be, hogy a rombusz olyan négyszög, melynek csúcsai egy téglalap oldalainak felezőpontjai!

225*. A rombusz két szemben fekvő csúcsából az oldalakra egyenlő szakaszok vannak felmérve (114. ábra). Bizonyítsátok be, hogy a szakaszok végpontjai egy téglalap csúcsai!



114. ábra

226*. Az a négyszög, melynek átlói egyenlők egymással és a szögek szögfelezői, négyzet. Bizonyítsátok be!

227*. A négy háromszög kerületének összege, melyekre az átlók a négyzetet felosztják, 20 cm-rel nagyobb a négyzet kerületénél. Határozzátok meg a négyzet átlóit!

228*. Bizonyítsátok be, hogy a téglalap egymást metsző szögfelezői által alkotott négyszög négyzet!

229*. Szerkesszetek négyzetet:
1) az átló és az oldal s összege alapján;
2) az átló és az oldal m különbsége alapján!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

230. A varrónőnek rombusz alakú szövetdarabot kellett kiszabnia. Hogyan ellenőrizhető mérőeszközök használata nélkül, hogy a kiszabott szövet rombusz alakú?

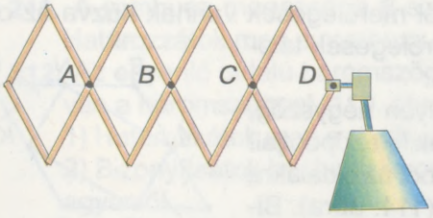
231. Az asztalos ellenőrizni akarta, négyzet alakú-e az általa készített asztallap. Lemérte az oldalakat, és azokat egyenlőnek találta. Helyes-e az ilyen ellenőrzés? Elegendő-e az asztallap átlóit lemérni és meggyőződni azok egyenlőségéről?

232. A négyzet alakú földrészleget kerítés veszi körül. Idővel a kerítésből két oszlop maradt a szemben fekvő csúcsoknál. Hogyan jelölhető ki a földrészleg eredeti határa?

233. Egy téglalap alakú lapból le kell vágni egy darabot a szélétől 45°-os szög alatt. Hogyan járjunk el?

234. András meg akart győződni arról, négyzet alakú-e a szalvéta. Összehajtotta az átlója mentén és úgy találta, a szalvéta mindkét felének szélei egybeesnek. Azonban figyelmeztették, hogy az ilyen ellenőrzés nem elegendő. Mindkét átló mentén össze kell hajtani. Ha a szélek így is egybeesnek, akkor a szalvéta négyzet alakú. Helyesen járt-e el András? Helyes volt-e a figyelmeztetés?

235*. A kihúzható falikar (115. ábra) és az összetolható rács (116. ábra) vázlata alapján magyarázzátok meg, az A, B, C, D... pontok miért mindig egy egyenes mentén helyezkednek el!



115. ábra

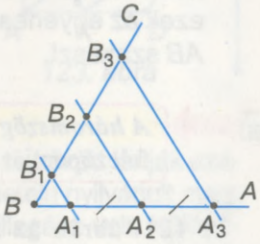


116. ábra



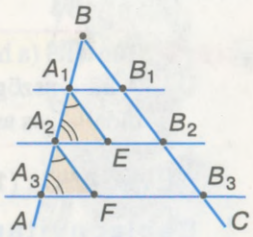
6.§. THALÉSZ TÉTELE. A HÁROMSZÖG KÖZÉPVONALA

Rajzoljunk egy ABC szöget (117. ábra). Tetszőleges körzőnyílással mérjünk rá a szög AB szárára A_1A_2 és A_2A_3 egyenlő szakaszokat. Vonalzó és derékszögvonalzó segítségével rajzoljunk az A_1, A_2, A_3 pontokon keresztül párhuzamos egyeneseket, melyek a szög BC szárát a B_1, B_2, B_3 pontokban metszik. Körző segítségével ellenőrizzük a B_1B_2 és B_2B_3 szakaszok hosszát. Vonjuk le a megfelelő következtetést!



117. ábra

Thalész tétele. Ha a szög szárait metsző párhuzamos egyenesek egyenlő szakaszokat metszenek ki a szög egyik szárából, akkor egyenlő szakaszokat metszenek ki a szög másik szárából is.



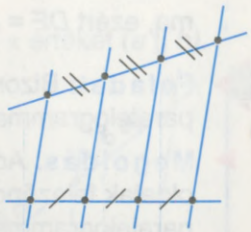
118. ábra

Adva: $ABC\angle$ (118. ábra),
$A_1A_2 = A_2A_3$,
$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.

Bebizonyítani: $B_1B_2 = B_2B_3$.

Bizonyítás. Az A_1 és A_2 pontokon keresztül a szög BC szárával párhuzamos A_1E és A_2F egyeneseket rajzolunk. Az $A_1A_2E\Delta = A_2A_3F\Delta$ egy oldal és a hozzá tartozó szögek alapján. A háromszögekben $A_1A_2 = A_2A_3$ a feltétel szerint, $A_1A_2E\angle = A_2A_3F\angle$ és $A_2A_1E\angle = A_3A_2F\angle$, mint két párhuzamos egyenes harmadikkal való metszésekor keletkező egyállású szögek. A háromszögek egybevágóságából következik, hogy $A_1E = A_2F$. Azonban $A_1E = B_1B_2$ és $A_2F = B_2B_3$, mint az $A_1B_1B_2E$ és $A_2B_2B_3F$ paralelogrammák szemben fekvő oldalai. Következésképpen $B_1B_2 = B_2B_3$.

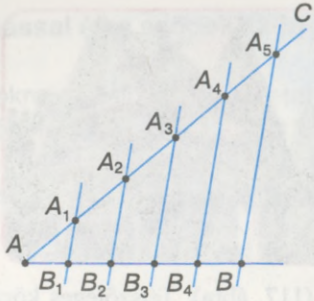
? Érvényes-e Thalész tétele, ha a szög szárai helyett két tetszőleges egyenest veszünk? Igen. Ha két egyenest párhuzamos egyenesekkel metszve a párhuzamosok egyenlő szakaszokat metszenek ki az egyik egyenesből, akkor egyenlő szakaszokat metszenek ki a másik egyenesből is (119. ábra).


119. ábra

Feladat: Osszuk fel az AB szakaszt 5 egyenlő részre!

Megoldás. Az A pontból rajzolunk egy AC félegyenest, amelyik nem fekszik az AB egyenesen (120. ábra). Az AC félegyenesre felmérünk öt, AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 egyenlő szakaszt. Meghúzzuk az A_5B szakaszt.

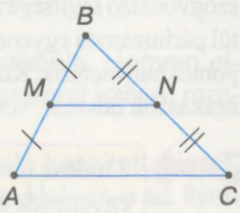
Az A_1, A_2, A_3, A_4 pontokból párhuzamosokat húzunk az A_5B szakasszal. Thalész tétele alapján ezek az egyenesek öt egyenlő részre osztják az AB szakaszt.



120. ábra

A háromszög középvonalának a két oldal felezőpontját összekötő szakaszt nevezzük.

A 121. ábrán az MN szakasz az ABC háromszög középvonala, mivel az M és N pontok az AB és BC oldalak felezőpontjai.



121. ábra

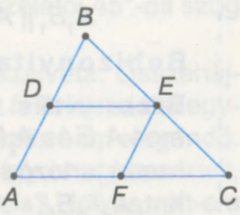
Tantétel (a háromszög középvonalának tulajdonsága). A háromszög középvonala párhuzamos a harmadik oldallal, és annak felével egyenlő.

Adva: $ABC\Delta$ (122. ábra), $AD = BD$, $CE = BE$.

Bebizonyítani: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE = \frac{1}{2}AC$.

Bizonyítás: 1) Legyen DE az $ABC\Delta$ középvonala. A D ponton keresztül párhuzamost húzunk AC-vel. Thalész tétele alapján ez az egyenes a BC szakaszt E középpontjában metszi, vagyis magába foglalja a DE középvonalat. Tehát $DE \parallel AC$.

2) Meghúzzuk az $EF \parallel AB$ egyenest. Thalész tétele alapján az EF egyenes felezi az AC-t. $AF = FC = \frac{1}{2}AC$. A szerkesztés szerint az $ADEF$ négyszög paralelogramma, ezért $DE = AF$. Következésképpen $DE = \frac{1}{2}AC$.



122. ábra

Feladat: Bizonyítsátok be, hogy a négyszög oldalainak felezőpontjai egy paralelogramma csúcsai!

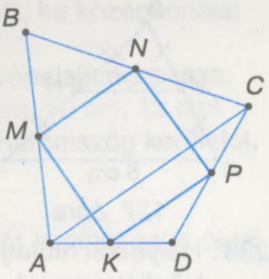
Megoldás. Adott az $ABCD$ négyszög, melyben az M, N, P, K pontok az oldalak felezőpontjai (123. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az $MNPK$ négyszög paralelogramma.

Meghúzzuk az AC átlót. MN az $ABC\Delta$ középvonala. Tehát $MN \parallel AC$ és $MN = \frac{1}{2}AC$. KP az ADC háromszög középvonala. Ezért $KP \parallel AC$ és $KP = \frac{1}{2}AC$.

A fentiekből $MN \parallel AC$ és $KP \parallel AC$, amiből következik, hogy $MN \parallel KP$;

$MN = \frac{1}{2} AC$ és $KP = \frac{1}{2} AC$, ebből eredően $MN = KP$.

Tehát az $MNPK$ négyszög szemben fekvő MN és KP oldalai párhuzamosak és egyenlők, ezért a négyszög paralelogramma.



123. ábra

Ha egy feladat feltételei között szerepel valamilyen szakasz felezőpontja, akkor próbáljátok alkalmazni a háromszög középvonalának tulajdonságairól szóló tételt.

TUDJATOK TÖBBET!

Thalész milétoszi ógörög tudóst (i. e. 625–548) a világ hét bölcse között tartják számon. Thalész géniusza az emberi tevékenység különböző területein nyilvánult meg. Foglalkozott mérnöki feladatokkal, államférfi, matematikus, csillagász volt. Különösen nagy érdeme, hogy a matematikában bevezette a bizonyítás szükségességének eszméjét. Bebizonyította, hogy az egyenlő szárú háromszögek alapján fekvő szögek egyenlők, hogy az átmérő a kört két egyenlő részre osztja, hogy a félkörbe derékszög írható. Thalész kezdte alkalmazni először az alapvető mértani eszközöket, a körzőt és a vonalzót. A tudós megmérte az egyiptomi piramisok magasságát. A tudós segédeszköze egy földbe szúrt bot volt és annak az árnyéka. Thalész előre jelezte az i. e. 585-ben bekövetkezett napfogyatkozást.


Thalész

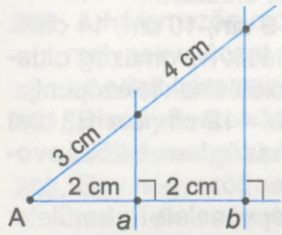
EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be Thalész tételét!
2. Hogyan osztható fel egy adott szakasz n egyenlő részre?
3. Mi a háromszög középvonala?
4. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a háromszög középvonalának tulajdonságáról szóló tantételt!

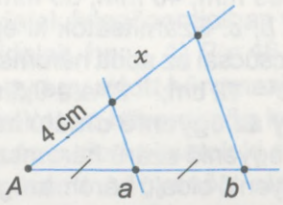
OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

236'. A 124. ábrán helyesen van-e feltüntetve a szakaszok hosszúsága? A feleletet magyarázzátok meg!

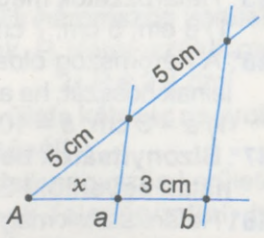
237'. A 125. és 126. ábrák adatai alapján határozzátok meg x értékét ($a \parallel b$).



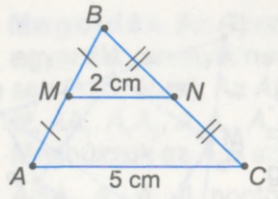
124. ábra



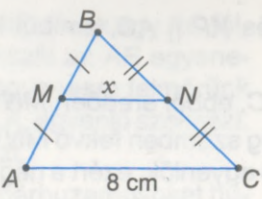
125. ábra



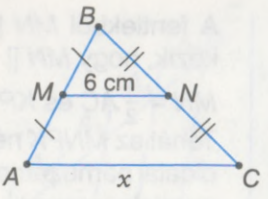
126. ábra



127. ábra



128. ábra



129. ábra

238'. Helyesen mutatja-e a 127. ábra a szakaszok hosszúságát? A feleletet indokoljátok meg!

239'. A 128. és 129. ábrák adatai alapján határozzátok meg az x értékét!

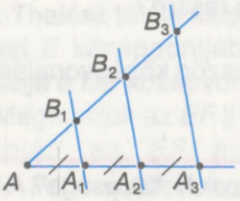
240'. *DE* és *EF* az *ABC*Δ középvonalai, melyek megfelelően párhuzamosak a *BC* és *AB* oldalakkal. Határozzátok meg:
1) az *FC* szakaszt, ha *DE* = 4 cm;
2) a *BD* szakaszt, ha *EF* = 7 cm!

241°. A 130. ábrán $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ és $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Határozzátok meg:
1) AB_1-et, ha $B_2B_3 = 6$ cm; 2) AB_3-at, ha $B_1B_2 = 5$ cm;
3) B_2B_3-at, ha $AB_3 = 12$ cm!

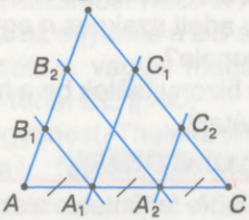
242°. Egy adott szakaszt osszátok fel a következő számú egyenlő részekre:
1) 3; 2) 4; 3) 6!

243°. Az *ABC* háromszögben (131. ábra) *AB* = 12 cm, *BC* = 18 cm. Az *AC* oldal három egyenlő részre van osztva, az osztópontokon keresztül az *AB* és *BC* oldalakkal párhuzamos egyeneseket rajzoltak. Határozzátok meg:
1) az *AB* és *BC* oldalakon keletkezett szakaszok hosszát;
2) a háromszög oldalai között levő párhuzamos egyenesek szakaszainak hosszát!

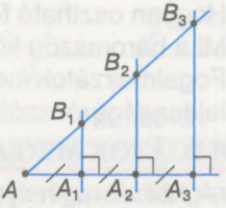
244°. A 132. ábra adatai alapján bizonyítsátok be, hogy $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$!



130. ábra



131. ábra



132. ábra

245°. Határozzátok meg a háromszögek középvonalát, ha oldalaik:
1) 8 cm, 5 cm, 7 cm; 2) 30 mm, 40 mm, 50 mm; 3) 9 cm, 10 cm, 14 cm!

246°. A háromszög oldalai *a, b, c.* Számítsátok ki egy másik háromszög oldalainak hosszát, ha annak csúcsai az adott háromszög oldalainak felezőpontja:
1) *a* = 8 cm, *b* = 10 cm, *c* = 12 cm; 2) *a* = 0,5 dm, *b* = 12 cm, *c* = 1,3 dm!

247°. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő oldalú háromszögben a középvonalak egyenlők! És az egyenlő szárú háromszögben?

248°. Határozzátok meg az egyenlő oldalú háromszög középvonalait, ha kerülete:
1) 12 cm; 2) 24 dm; 3) 48 mm!

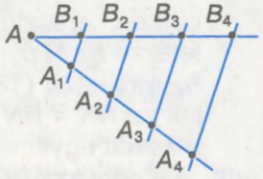
249°. Számítsátok ki az egyenlő oldalú háromszög kerületét, ha középvonala:
1) 4 cm; 2) 0,8 dm; 3) 100 mm!

250°. Határozzátok meg a háromszög kerületét, ha középvonalainak hossza:
1) 3 cm, 5 cm, 6 cm; 2) 7 cm, 9 cm, 12 cm; 3) 8 cm, 10 cm, 12 cm!

251°. Állítsatok össze képletet, és számítsátok ki az ABC háromszög kerületét, ha a középvonalai által alkotott háromszög kerülete:
1) 18 cm; 2) 2,4 dm; 3) 300 mm!

252°. Határozzátok meg a paralelogramma átlóit, ha a két szomszédos oldal felezőpontját összekötő két szakasz hossza:
1) 5 cm és 11 cm; 2) 0,6 dm és 0,9 dm;
3) 100 mm és 14 cm!

253°. Állapítsátok meg a háromszög fajtáját, ha:
1) középvonalai egyenlők egymással;
2) két középvonala egyenlő egymással!



133. ábra

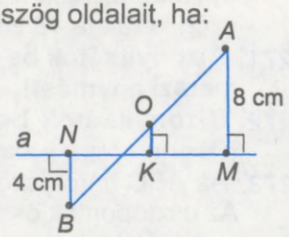
254. Osszatok fel egy szakaszt két részre úgy, hogy a részek aránya: 1) 2 : 3; 2) 3 : 4; 3) 2 : 5 legyen!

255. A 133. ábrán $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ és $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$. Határozzátok meg:
1) AB_3-at, ha az AB_4 és B_2B_3 szakaszok hosszúsága közötti különbség 9 cm;
2) B_1B_4-et, ha az AB_4 és B_1B_3 szakaszok hosszúsága közötti különbség 8 cm;
3) AB_4-et, ha a B_1B_4 és B_1B_2 szakaszok hosszúsága közötti különbség 10 cm!

256. Az N és M pontok az $ABCD$ paralelogramma AD és BC oldalának felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az AN és CM egyenesek a BD átlót három egyenlő részre osztják!

257. Az egyenlő szárú háromszögben az alappal párhuzamos középvonal m, a háromszög kerülete P. Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha:
1) $m = 5$ cm, $P = 40$ cm; 2) $m = 2{,}5$ cm, $P = 2{,}5$ dm!

258. Az A és B pontok az a egyenes ellentétes oldalain helyezkednek el tőle 8 cm és 4 cm távolságra (134. ábra). Határozzátok meg az AB szakasz O középpontjának az a egyenestől való távolságát!



134. ábra

259. Egy háromszög oldalainak aránya 3 : 4 : 5, kerülete P. Határozzátok meg a középvonalai által alkotott háromszög oldalait, ha:
1) $P = 60$ cm; 2) $P = 4{,}8$ dm!

260. A háromszög oldalainak aránya 7 : 8 : 9. Egy másik háromszög kerülete, melynek csúcsai az oldalak felezőpontjaiban vannak, P. Határozzátok meg az adott háromszög oldalait, ha: 1) $P = 48$ cm; 2) $P = 2{,}4$ dm!

261. Bizonyítsátok be, hogy egy adott háromszög kerülete kétszer nagyobb a középvonalai által alkotott háromszög kerületénél!

262. Egy négyszög átlói m és n. Számítsátok ki egy másik négyszög kerületét, melynek csúcsai az adott négyszög oldalainak felezőpontjai, ha:
1) $m = 4$ cm, $n = 6$ cm; 2) $m = 24$ cm, $n = 25$ cm!

263. Egy négyszög átlóinak összege s. Határozzátok meg annak a négyszögnek a kerületét, melynek csúcsai az adott négyszög oldalainak felezőpontjában vannak, ha: 1) $s = 25$ cm; 2) $s = 3{,}5$ dm!

264. A négyzet átlója d. Számítsátok ki a négyzet oldalainak felezőpontjait összekötő szakaszok által alkotott négyszög kerületét, ha: 1) $d = 8$ cm; 2) $d = 1{,}3$ dm!

265. Bizonyítsátok be: 1) a téglalap oldalainak felezőpontjai egy rombusz csúcsai; 2) a rombusz oldalainak felezőpontjai egy téglalap csúcsai; 3) a négyzet oldalainak felezőpontjai egy másik négyzet csúcsai!

266. Szerkesszetek háromszöget oldalainak felezőpontjai alapján!

267. Az ABC szögön belül adva van egy M pont. Rajzoljatok egyenest az M ponton keresztül úgy, hogy a szög szárai által belőle kimetszett szakaszt felezze az M pont!

Szerkesztés (135. ábra). Meghúzzuk $MN \parallel AB$; a szög BC szárára rámérjük az $NK = BN$ szakaszt; a K és az M pontokon keresztül meghúzzuk a keresett egyenest. Bizonyítsátok be, hogy ez a szerkesztés helyes!

268.* A K pont az ABC háromszög AM súlyvonalának felezőpontja. A BK egyenes az AC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy $AC = 3AD$!

269.* **Bizonyítsátok be, hogy a háromszögben a súlyvonalak metszéspontja – a háromszög csúcsaitól számítva – 2 : 1 arányban osztja a súlyvonalakat!**

270.* Az ABC háromszög A, B és C csúcsán keresztül a szemben fekvő oldalakkal párhuzamos egyenesek vannak rajzolva, melyek $A_1B_1C_1$ háromszöget alkotnak (136. ábra).

1) Bizonyítsátok be, hogy az A, B és C pontok felezik az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalait!

2) Számítsátok ki az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalait, ha $AB = 6$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 15$ cm!

3) Határozzátok meg az ABC háromszög kerületét, ha az $A_1B_1C_1$ háromszög kerülete 48 cm!

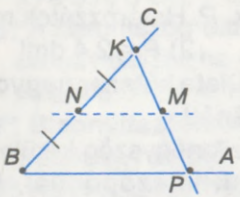
271.* **Bizonyítsátok be, hogy a háromszög három magassága egy pontban metszi egymást!**

272.* **Bizonyítsátok be, hogy a háromszög középvonalai négy egyenlő háromszögre osztják a háromszöget!**

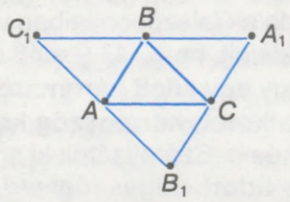
273.* Az ABC háromszög mindegyik oldala három egyenlő részre van osztva. Az osztópontok össze vannak kötve szakaszokkal (137. ábra).

1) Határozzátok meg az osztópontokat összekötő szakaszok hosszának összegét, ha az ABC háromszög kerülete 36 cm!

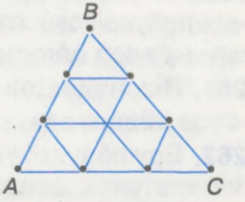
2) Oldjátok meg a feladatot arra az esetre, ha a háromszög oldalai négy egyenlő részre vannak osztva!



135. ábra



136. ábra



137. ábra

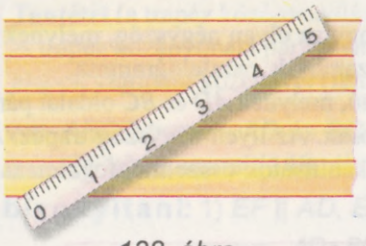
274.* Bizonyítsátok be, hogy a háromszög csúcsai egyenlő távolságra vannak a két oldaluk felezőpontján átmenő egyenesektől!

275.* Az ABC szög belső tartományában fekvő M ponton keresztül úgy húzzatok egyenest, hogy a szög szárai által az egyenesből kimetszett szakaszt az M pont 1 : 2 arányban ossza!

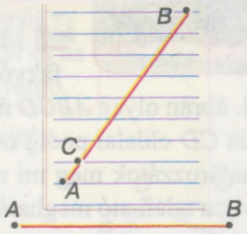
ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

276. Derékszög alakú sávot (deszkát, bádoglemezt, kartont) öt egyenlő szélességű derékszögű sávra kell osztani. E célból a vonalzót úgy helyezték rá a sávra, amint az a 138. ábrán látható. Megjelölték az azonos hosszúságú beosztásoknak megfelelő pontokat. Ezután a pontokon keresztül a sáv szélével párhuzamos egyeneseket rajzoltak. Miért osztható fel ily módon a sáv öt egyenlő részre?

277. Van egy füzetlapunk vízszintes párhuzamos vonalakkal és körzőnk. Az adott AB szakaszt egyenlő részekre, például nyolc részre kell osztanunk (139. ábra). A rajz alapján magyarázzátok meg, hogyan lehet ezt elvégezni. Miért $AC = \frac{1}{8} AB$? Magyarázzátok el, hogyan lehet például egy ceruzát ennek a papírlapnak a segítségével öt egyenlő részre osztani!



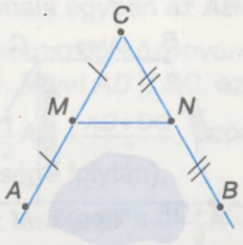
138. ábra



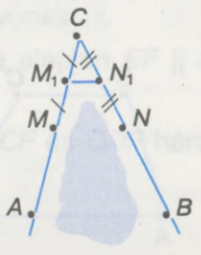
139. ábra

278. A 140. ábra bemutatja, hogyan mérhető meg a terepen az A és B pontok közötti távolság, melyek között az átjárás nem lehetséges. Megjelöltek egy tetszőleges C pontot, és kijelölték a CA és CB egyeneseket. Megkeresték az AC és CB távolságok M és N felezőpontját, és lemérték az M és N pontok közötti távolságot. Magyarázzátok meg, a keresett AB távolság miért az MN távolság kétszerese?

279. Előfordulhat, hogy az M és N pontok között a távolság, mint a 278. feladatban, nem mérhető meg (141. ábra). Magyarázzátok meg a rajz alapján, hogyan mérhető meg az AB távolság ebben az esetben! A keresett AB távolság miért egyenlő az M_1N_1 távolság négyszeresével?



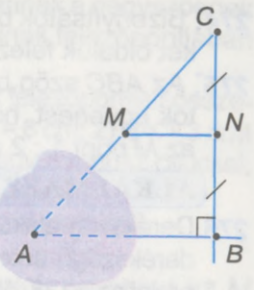
140. ábra



141. ábra

280. A 142. ábra bemutatja, hogyan mérhető meg az A és B pontok közötti távolság, ha az A pontot nem lehet megközelíteni. Magyarázzátok meg a mérés menetét! A B szögnek okvetlenül derékszögnek kell-e lennie?

281.* Három, A, B és C település egy síkban, de nem egy egyenesen fekszenek. Utat kell építeni egyenlő távolságra mindhárom településtől. Hogyan oldható ez meg? Mutassátok be rajzon! Hány ilyen út építhető?



142. ábra



7. §. A TRAPÉZ

Már tudjátok, hogy az olyan négyszög, melynek szemben fekvő oldalai párhuzamosak, paralelogramma.

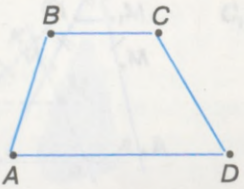
A 143. ábrán olyan $ABCD$ négyszög látható, melynek AD és BC oldalai párhuzamosak, AB és CD oldalai pedig nem párhuzamosak. Az ilyen négyszög trapéz. A fentiek alapján határozzátok meg mi a trapéz, és hasonlítsátok össze megfogalmazásotokat a tankönyvben található meghatározással.

Trapéznak nevezzük azt a négyszöget, melynek két oldala párhuzamos, másik két oldala pedig nem párhuzamos.

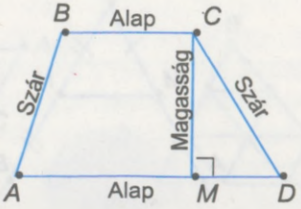
A párhuzamos oldalak a trapéz *alapjai*, a nem párhuzamos oldalak a trapéz *szárai*. A 144. ábrán AD és BC a trapéz alapjai, AB és CD a trapéz szárai.

? Lehetnek-e egyenlők a trapéz alapjai? Nem, mert ebben az esetben paralelogrammát kapunk.

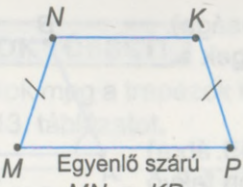
A trapéz *magasságának* az egyik alap tetszőleges pontjából a másik alapra, vagy annak meghosszabbítására bocsátott merőlegest nevezzük (144. ábra).



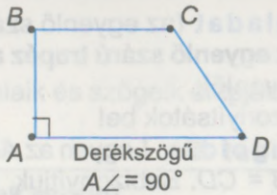
143. ábra



144. ábra



145. ábra

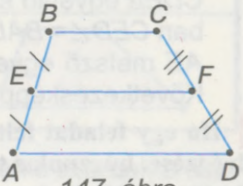


146. ábra

Azt a trapézt, melynek szárai egyenlők egymással, *egyenlő szárú* trapéznak nevezzük. A 145. ábrán az *MNKP* trapéz egyenlő szárú, mert $MN = KP$.

Azt a trapézt, melynek egyik szöge derékszög, *derékszögű* trapéznak nevezzük. Az *ABCD* trapéz derékszögű, mert $A\angle = 90°$ (146. ábra).

A szárak felezőpontjait összekötő szakaszt a ***trapéz középvonalának*** nevezzük.



147. ábra

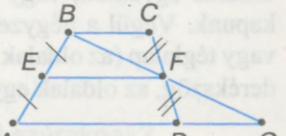
A 147. ábrán az *EF* szakasz az *ABCD* trapéz középvonala, mert *E* és *F* az *AB* és *CD* szárak felezőpontjai.

Tantétel (a trapéz középvonalának tulajdonságai).
A trapéz középvonala párhuzamos az alapokkal és az alapok számtani közepével (félösszegével) egyenlő.

Adva: *ABCD* trapéz. *AD* és *BC* a trapéz alapjai, *EF* középvonal (148. ábra).

Bebizonyítani: 1) $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$;

2) $EF = \frac{AD+BC}{2}$.



148. ábra

Bizonyítás. Mivel *EF* az *ABCD* trapéz középvonala, ezért $AE = BE$, $DF = CF$. A *B* és *F* pontokon keresztül egyenest húzunk, mely a trapéz *AD* alapjának meghosszabbítását a *Q* pontban metszi. $BCF\Delta = QDF\Delta$ az oldal és a hozzá tartozó szögek alapján. A háromszögekben $CF = FD$ a feltétel szerint, $BFC\angle = QFD\angle$ mint csúcsszögek, $BCF\angle = QDF\angle$ mint a *BC* és *AQ* párhuzamosok *CD* metsző egyenessel alkotott belső váltószögei. A háromszögek egyenlőségéből következik, hogy $BF = FQ$, tehát a trapéz *EF* középvonala egyben az *ABQ* háromszög középvonala is.

1) A háromszög középvonalának tulajdonsága alapján $EF \parallel AQ$, tehát $EF \parallel AD$. Mivel $AD \parallel BC$, ezért $EF \parallel BC$.

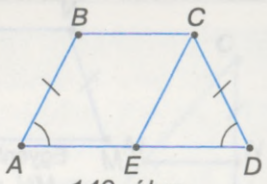
2) $EF = \frac{1}{2}AQ = \frac{AD+DQ}{2}$, azonban $DQ = BC$ (a *BCF* és *QDF* háromszögek egyenlősége folytán).

Kapjuk tehát: $EF = \frac{AD+BC}{2}$.

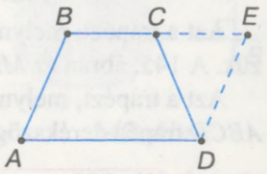
Feladat (az egyenlő szárú trapéz tulajdonsága). **Az egyenlő szárú trapéz alapjain fekvő szögek egyenlők.**

Bizonyítsátok be!

Megoldás. Legyen az $ABCD$ trapézban (149. ábra) $AB = CD$. Bebizonyítjuk, hogy az AD alapon fekvő szögek egyenlők. Meghúzzuk a $CE \parallel AB$ egyenest. A keletkezett $ABCE$ négyszög paralelogramma, mivel szemben fekvő oldalai páronként párhuzamosak. A paralelogramma tulajdonságai alapján $AB = CE$, a feltétel szerint pedig $AB = CD$. Tehát $CE = CD$ és $CDE\Delta$ egyenlő szárú. Ezért $CDE\angle = CED\angle$. Azonban $CED\angle = BAD\angle$ mint a CE és AB párhuzamosok AE metsző egyenessel alkotott egyállású szögek. Következésképpen $CDE\angle = BAE\angle$.



149. ábra

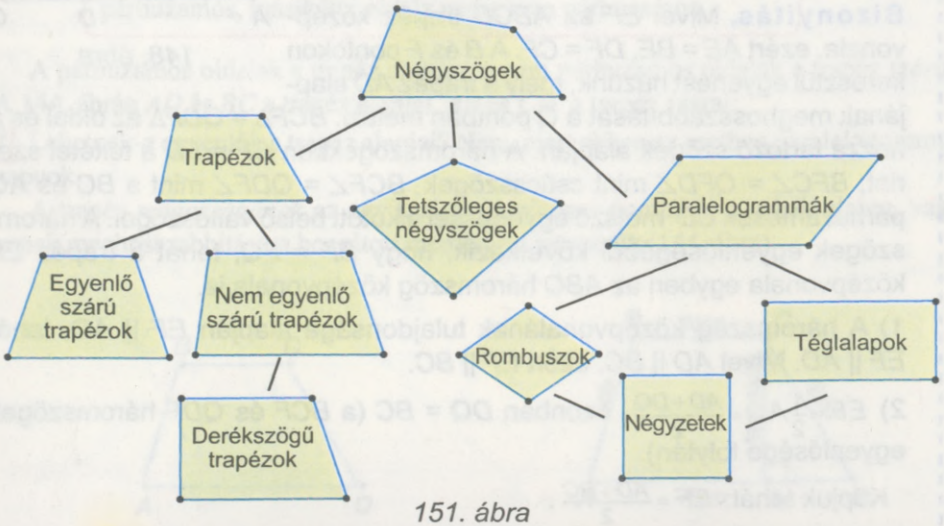


150. ábra

Ha egy feladat feltételei között trapéz szerepel, célszerű egy segédszerkesztés elvégzése: húzzunk a trapéz csúcsán át a szárral párhuzamos egyenest (149. és 150. ábrák), majd alkalmazzuk a kapott paralelogramma és háromszög tulajdonságait.

Oldjátok meg a fenti feladatot a 150. ábra felhasználásával!

Vizsgáljátok meg a 151. ábrát, ahol fel vannak tüntetve a tanult négyszögek. Megfigyelhetjük, hogy a négyszögek között vannak paralelogrammák (szemben fekvő oldalaik páronként párhuzamosak) és trapézok (csak két szemben fekvő oldaluk párhuzamos). A trapézok között lehetnek egyenlő szárúak és derékszögűek. Ha a paralelogrammában az oldalak egyenlők, vagy mindegyik szög derékszög, akkor rombuszt vagy téglalapot kapunk. Végül a négyzet egyfajta (speciális) rombusz (valamennyi szög derékszög), vagy téglalap (az oldalak egyenlők egymással), vagy paralelogramma (valamennyi szög derékszög, az oldalak egyenlők egymással).

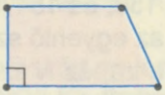
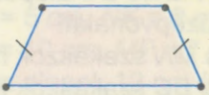
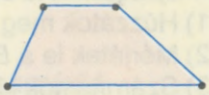


151. ábra

TUDJATOK TÖBBET!

1. Vizsgáljátok meg a trapézok tulajdonságait oldalaik és szögeik alapján rendszerező 13. táblázatot.

13. táblázat

Szögek szerint	Oldalak szerint	
	Egyelő szárú	Nem egyenlő szárú
Derékszögű		
Nem derékszögű		

A szárak alapján a trapézok egyenlő szárúakra és nem egyenlő szárúakra oszthatók, szögeik szerint a trapézok lehetnek derékszögűek és nem derékszögűek. Az egyenlő szárú trapézok csak egyfélék lehetnek – nem derékszögűek. A nem egyelő szárúak között vannak derékszögűek és nem derékszögűek.

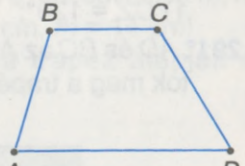
2. A trapéz elnevezés a görög *trapezion* szóból ered, ami asztalkát jelent. A trapéz szakkifejezésként a XVIII. században kezdett elterjedni. Azt, hogy a trapéz középvonala egyenlő az alapok számtani közepével, már az ókori egyiptomiak és a babilóniai földmérők is ismerték.

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Mi a trapéz?
2. A trapéz mely oldalait nevezzük alapoknak, melyeket száraknak?
3. Milyen trapézt nevezünk egyenlő szárúnak? Derékszögűnek?
4. Mit nevezünk a trapéz középvonalának?
5. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a trapéz középvonalának tulajdonságairól szóló tételt!

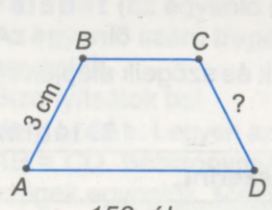
OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

282'. A 152. ábrán az *ABCD* trapéz látható, melyben *AD* || *BC*. Nevezzétek meg:
1) a trapéz alapjait;
2) a trapéz szárait;
3) az alapokon fekvő szögeket;
4) a szárakon fekvő szögeket!

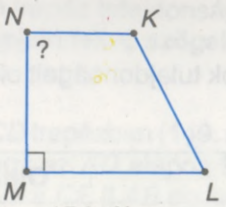


152. ábra

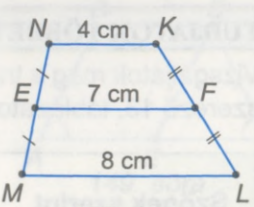
283'. Rajzoljatok hegyesszöget *O* csúccsal! Húzzatok a szög szárait metsző két párhuzamos egyenest! Jelöljétek a párhuzamos egyenesek és a szög szárainak metszéspontjait *A*, *B*, *C* és *D* betűkkel. Mi az így keletkezett *ABCD* négyszög?



153. ábra



154. ábra



155. ábra

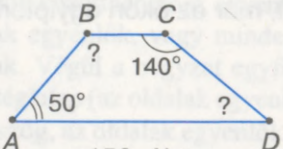
284. A 153. és 154. ábrák alapján határozzátok meg:
1) az egyenlő szárú trapéz *CD* szárát (153. ábra);
2) a trapéz *N* szögét (154. ábra)!

285. Rajzoljatok *ABCD* trapézt *AD* és *BC* alapokkal!
1) Húzzátok meg az *MN* középvonalat!
2) Mérjétek le a *BC*, *AD* és *MN* szakaszok hosszát!
3) Számítsátok ki az *AD* és *BC* szakaszok hosszának összegét! Hányszor nagyobb ezeknek a szakaszoknak az összege a trapéz középvonalánál?

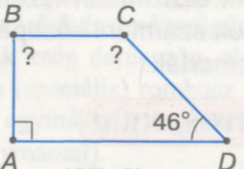
286. Helyesen tüntették-e fel a 155. ábrán a trapéz középvonalának hosszát? A feleletet magyarázzátok meg!

287. **Bizonyítsátok be, hogy a trapéz szárához tartozó szögek összege 180°!**

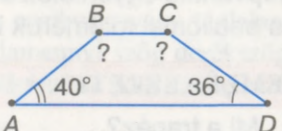
288. A 156–158. ábrákon feltüntetett adatok alapján határozzátok meg az *ABCD* trapéz ismeretlen szögeit!



156. ábra



157. ábra



158. ábra

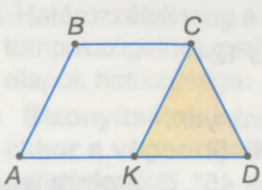
289. Az *ABCD* trapéz alapjai *AD* és *BC*. Határozzátok meg:
1) $A\angle$ és $C\angle$, ha $B\angle = 110°$, $D\angle = 30°$;
2) $A\angle$ és $D\angle$, ha $B\angle = 125°$, $C\angle = 145°$!

290. Az *ABCD* derékszögű trapézban az *AB* szár merőleges az *AD* alapra. Határozzátok meg a trapéz ismeretlen szögét, ha:
1) $C\angle = 120°$; 2) $D\angle = 25°$; 3) $C\angle - A\angle = 40°$!

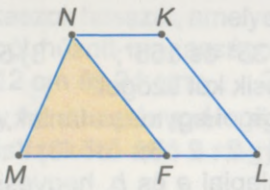
291. *AD* és *BC* az *ABCD* trapéz alapjai. A 14. táblázat adatai alapján határozzátok meg a trapéz szögeit!

14. táblázat

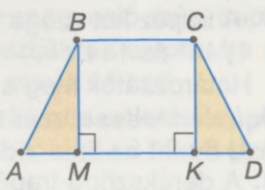
$A\angle$	70°	65°		
$B\angle$			120°	135°
$C\angle$	154°			142°
$D\angle$		36°	28°	



159. ábra



160. ábra



161. ábra

292°. A 159. ábrán az *ABCD* egyenlő szárú trapéz, melyek alapjai *AD* és *BC*, *CK* || *AB*. Bizonyítsátok be, hogy:

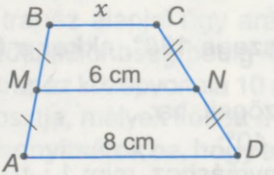
1) *ABCK* négyszög paralelogramma; 2) a *KCD* háromszög egyenlő szárú!

293°. A 160. ábrán látható *MNKL* trapéz alapjai *ML* és *NK*, *NF* || *KL*. Számítsátok ki:

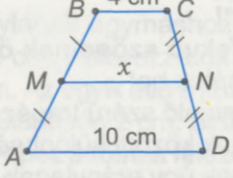
1) az *ML* alapot, ha *MF* = 5 cm, *NK* = 2 cm;
2) az *NK* alapot, ha *ML* = 10 cm, *MF* = 7 cm;
3) az *MF* szakaszt, ha az alapok 12 cm és 4 cm hosszúak!

294°. Az *ABCD* egyenlő szárú trapéz magasságai *BM* és *CK*, alapjai pedig *AD* és *BC* (161. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $ABM\Delta = DCK\Delta$!

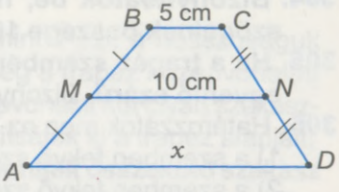
295°. A 162 – 164. ábrák adatai alapján az *ABCD* trapézban számítsátok ki az x szakaszt!



162. ábra



163. ábra



164. ábra

296°. A trapéz alapjai *AD* és *BC*, középvonala pedig *MN*. Töltsétek ki a 15. táblázatot!

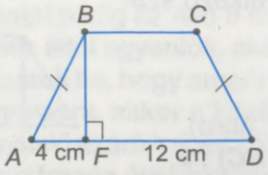
15. táblázat

AD	10 cm	7 cm		11 cm	9 cm
BC	6 cm		5 cm		15 cm
MN		8 cm	9 cm	10 cm	

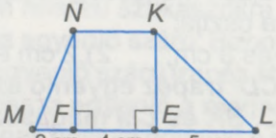
297°. Számítsátok ki a trapéz kerületét, melynek szárai *c* és *d*, középvonala *m*, ha:

1) *c* = 8 cm, *d* = 12 cm, *m* = 10 cm; 2) *c* = *d* = 17 cm, *m* = 14 cm!

298°. A 165. és 166. ábrák alapján számítsátok ki a trapéz alapjait és középvonalát!



165. ábra



166. ábra

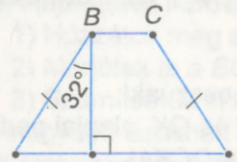
299. A trapéz két szöge:
1) 46° és 144°; 2) 35° és 155°; 3) 52° és 124°.
Határozzátok meg a másik két szöget!

300. Lehetnek-e a trapéz szögei egymás utániak, ha arányuk:
1) 3 : 8 : 5 : 6; 2) 1 : 2 : 2 : 3; 3) 7 : 3 : 4 : 5!

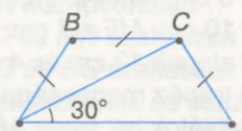
301. A derékszögű trapéz alapjai a és b, hegyesszöge 45°. Számítsátok ki a trapéz magasságát, ha: 1) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm; 2) $a = 62$ mm, $b = 10$ cm!

302. **Ha a trapéz alapján fekvő szögek egyenlők, akkor a trapéz egyenlő szárú.** Bizonyítsátok be!

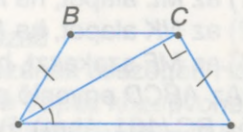
303. A 167–169. ábrák adatai alapján határozzátok meg az $ABCD$ ($AD \parallel BC$) trapéz szögeit!



167. ábra



168. ábra



169. ábra

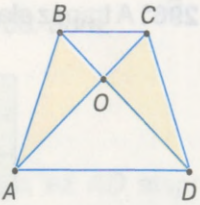
304. **Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú trapéz szemben fekvő szögeinek összege 180°!**

305. **Ha a trapéz szemben fekvő szögeinek összege 180°, akkor a trapéz egyenlő szárú.** Bizonyítsátok be!

306. Határozzátok meg az egyenlő szárú trapéz szögeit, ha:
1) a szemben fekvő szögek közötti különbség 40°;
2) a szemben fekvő szögek úgy aránylanak egymáshoz, mint 1 : 4!

307. **Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú trapéz átlói egyenlők egymással!**

308. Az $ABCD$ trapéz egyenlő szárú, $AD \parallel BC$, AC és BD átlók, O pedig az átlók metszéspontja (170. ábra). Bizonyítsátok be:
1) a $BOC\Delta$ és $AOD\Delta$ háromszögek egyenlő szárúak;
2) $AOB\Delta = DOC\Delta$!



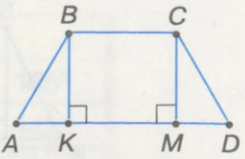
170. ábra

309. Az egyenlő szárú trapéz nagyobbik alapja 10 cm, a szár 4 cm, a közöttük levő szög 60°. Számítsátok ki a kisebbik alapot!

310. Az egyenlő szárú trapéz hegyesszöge 60°, az alapok 15 cm és 49 cm hosszúak. Számítsátok ki a trapéz szárát!

311. Határozzátok meg az egyenlő szárú trapéz alapjait, ha a tompaszög csúcsából rajzolt magasság az alapot a következő szakaszokra osztja:
1) 4 cm és 8 cm; 2) 2 cm és 7 cm!

312. **Az $ABCD$ trapéz egyenlő szárú.**
$AD \parallel BC$, BK és CM magasságok (171. ábra).
Bizonyítsátok be: 1) $AK = MD = (AD - BC) : 2$;
2) $KD = AM = (AD + BC) : 2$!



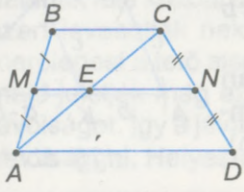
171. ábra

313. Határozzátok meg a szakaszok hosszát, amelyekre az egyenlő szárú trapéz tompaszögeinek csúcsából húzott magasságok osztják az alapot, ha az alapok hosszúsága: 1) 12 cm és 24 cm; 2) 8 cm és 14 cm!

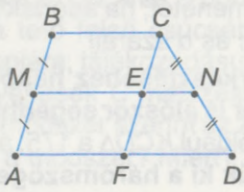
314. **Bizonyítsátok be, hogy ha a trapéz szára egyenlő a kisebbik alappal, akkor a végpontjaikat összekötő átló a nagyobbik alapon fekvő szög szögfelezője!**

315. Az egyenlő szárú trapézban az átló a hegyesszög szögfelezője, az alapok a és b hosszúságúak. Számítsátok ki a trapéz kerületét, ha:
1) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm; 2) $a = 62$ mm, $b = 10$ cm!

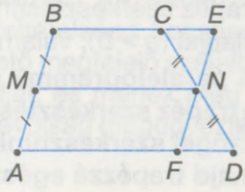
316. A 172–174. ábrák felhasználásával bizonyítsátok be a trapéz középvonalának tulajdonságairól szóló tantételt!



172. ábra



173. ábra



174. ábra

317. A trapéz alapjai úgy aránylanak egymáshoz, mint 7 : 3, a hosszúságuk közötti különbség pedig 4,8 cm. Határozzátok meg a trapéz középvonalát!

318. A trapéz középvonala 10 cm. Az egyik átló a középvonalat két olyan szakaszra osztja, melyek között a különbség 2 cm. Számítsátok ki a trapéz alapjait!

319. **Bizonyítsátok be, hogy a trapéz átlóinak felezőpontjait összekötő szakasz párhuzamos az alapokkal, és az alapok különbségének felével egyenlő!**

320. A trapéz kisebbik alapja a, az átlók felezőpontjai közötti távolság pedig c. Határozzátok meg a trapéz nagyobbik alapját, ha:
1) $a = 6$ cm, $c = 4$ cm; 2) $a = 50$ mm, $c = 2$ cm!

321. Szerkesszetek $ABCD$ trapézt, melynek alapjai AD és BC, ha:
1) $AD = 12$ cm, $AB = 6$ cm, $CD = 8$ cm, $D\angle = 35°$;
2) $AD = 10$ cm, $AB = 5$ cm, $CD = 6$ cm, $BD = 8$ cm;
3) $AD = 7$ cm, $AB = 3$ cm, $A\angle = 60°$, $D\angle = 50°$;
4) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AC = d$!

322.* Ha a trapéz egyik alapján fekvő szögek szögfelezőinek metszéspontja a másik alapon van, akkor a másik alap a trapéz szárainak összegével egyenlő. Bizonyítsátok be!

323.* Határozzátok meg az egyenlő szárú trapéz szögeit, ha szára 24 cm, a középvonalat pedig az átló 8 cm és 20 cm hosszú szakaszokra osztja!

324.* **Ha a trapéz átlói egyenlők, akkor a trapéz egyenlő szárú.** Bizonyítsátok be!

325.* **Bizonyítsátok be, hogy amennyiben az egyenlő szárú trapéz átlói merőlegesek egymásra, akkor a középvonal hossza egyenlő a magassággal!**

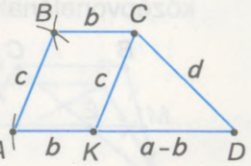
326.* Ha az egyenlő szárú trapéz középvonalának hossza egyenlő a magassággal, akkor a trapéz átlói merőlegesek egymásra. Bizonyítsátok be!

327.* Egy egyenes a trapézt rombuszra és egyenlő oldalú háromszögre osztja. Határozzátok meg:
1) a trapéz átlói közötti szöget;
2) a trapéz alapjait, ha középvonala 18 cm!

328.* A derékszögű trapézt az átló két háromszögre osztja: egy egyenlő oldalú háromszögre, melyben az oldal hossza a, és egy derékszögű háromszögre. Határozzátok meg a trapéz középvonalát!

329.* A trapéz kerülete 60 cm, a nagyobb alapon fekvő szögei pedig 60 fokosak. Az átló a középvonalat két olyan szakaszra osztja, amelyek közül az egyik 7 cm-rel hosszabb a másiknál. Határozzátok meg a trapéz alapjait!

330.* A 175. ábra alapján állítsátok össze az $ABCD$ trapéz szerkesztésének menetét, ha adottak a és b alapjai ($a > b$), valamint c és d szárai!



175. ábra

A paralelogramma szerkesztéséhez hasonlóan a trapéz szerkesztésekor is először segédháromszöget szerkesztünk (például $KCD\Delta$ a 175. ábrán), **majd trapézzá egészítjük ki a háromszöget.**

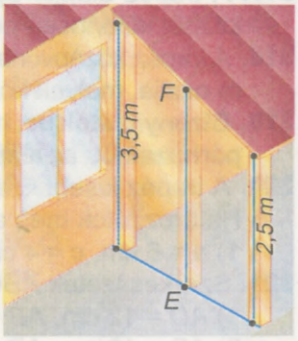
331.* Szerkesszetek trapézt a és b alapjai ($a > b$), valamint d_1 és d_2 átlói alapján!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

332. Egyenlő szárú trapéz alakú burkolólapokból parkettát kell készíteni. Hogyan járjunk el?

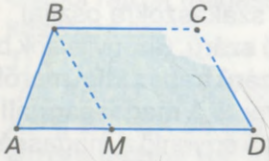
333. A nyaraló bejárata felett védőtető van. Középen alá kellett támasztani a tetőt (F pont a 176. rajzon). Hogyan határozható meg mérés nélkül a támaszték hossza, ha a tető szélei a talaj felszínétől 2,5 m és 3,5 m magasságban vannak?

334. A tetőfedő pala nem egyenlő szárú trapéz alakú. Meg kell határozni az oldalak hosszát, ha:
1) le van törve a pala egy sarka (177. ábra);
2) a pala két sarka van letörve (178 – 179. ábrák).
Magyarázzátok meg, hogyan kell eljárni!

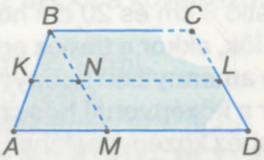


176. ábra

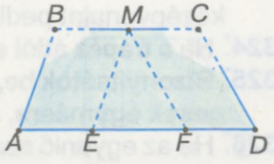
335. Határozzátok meg a szállítószalag vége és a földfelszín közötti távolságot (mérés kizárva), ha a másik vége és a közepe a földfelszíntől rendre 0,5 m és 2 m magasan van (180. ábra)!



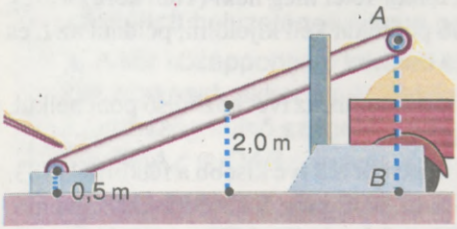
177. ábra



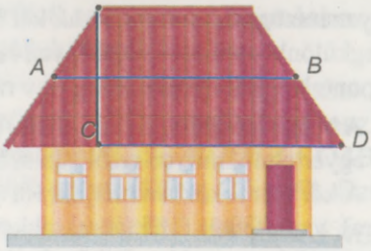
178. ábra



179. ábra



180. ábra



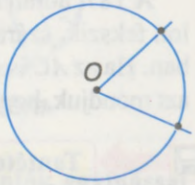
181. ábra

336.* Figyeljétek meg a 181. ábrát! Az építőknek meg kell mérni a tető oldalának fele közötti távolságot (az *A* és *B* pontok között). A következő módszert javasolták nekik: a tető felső csúcsából feltételesen bocsássanak merőlegest a tető alsó alapjára, tájékozódásul a tető megfelelő széleit véve, majd jelöljék meg az egyenesek *C* metszéspontját, és mérjék meg a *CD* távolságot. Így a javasolt módszer szerint az *AB* távolság megegyezik a *CD* távolsággal. Helyes-e ez a módszer? Miért?



8. § KÖZÉPPONTI ÉS KERÜLETI SZÖGEK

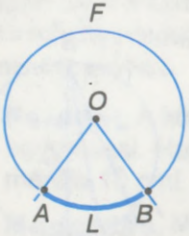
Rajzolunk egy *O* középpontú kört, és szöget szerkesztünk, melynek csúcsa a kör középpontjában van (182. ábra). Megkapjuk a kör középponti szögét.



182. ábra

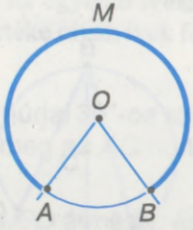
Azt a szöget, melynek csúcsa a kör középpontjában van, ***középponti szögnek*** nevezzük.

Legyen a középponti szög szárainak metszéspontja az *O* középpontú körvonallal *A* és a *B* pontja. Az *AOB* középponti szögnek két, *A* és *B* végpontú ív felel meg. Az egyik kisebb a félkörnél (183. ábra), a másik nagyobb a félkörnél (184. ábra). Ha az *AOB* szög



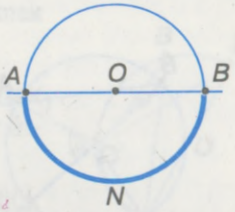
$ALB\cup = AOB\angle$

183. ábra



$AMB\cup = 360° - AOB\angle$

184. ábra



$ANB\cup = 180°$

185. ábra

egyenesszög, akkor ugyancsak két ív, azaz két félkör felel meg neki (185. ábra). Hogy megkülönböztethessünk két ilyen ívet, közbülső pontokat kell kijelölni, például az L és F pontokat (183. ábra).

A beírás módja: $ALB\cup$ és $AFB\cup$ (183. ábra). Jelölhetjük az ívet közbülső pont nélkül, ha egyértelmű, milyen ívről van szó, például $AB\cup$!

A kör ívét fokokban mérjük. Ha az O középpontú kör AB íve kisebb a félkörnél (183. ábra), vagy félkör (185. ábra), akkor fokmértéke az AOB szög fokmértékével egyenlő. Ha az AB ív nagyobb a félkörnél (184. ábra), akkor fokmértéke $360°-AOB\angle$.

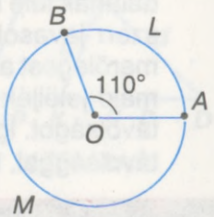
A teljes kör fokmértéke 360°.

A 186. ábrán az ALB ív fokmértéke 110°.

Röviden azt mondjuk: Az ALB ív 110°-os, és így írjuk: $ALB\cup = 110°$.

Ezen a rajzon $AMB\cup=360° - 110°=250°$.

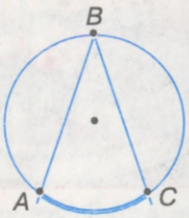
Függ-e a kör ívének fokmértéke a kör sugarának hosszától? Nem, mivel a kör sugarától nem függ a megfelelő középponti szög fokmértéke.



186. ábra

Az olyan szöget, melynek csúcsa a körvonalon fekszik, szárai pedig metszik a kört, ***kerületi szögnek*** nevezzük.

A 187. ábrán az $ABC\angle$ kerületi szög, mert B csúcsa a körvonalon fekszik, szárai pedig metszik a körvonalat az A és a C pontokban. Ha az AC ív az ABC kerületi szög belső tartományában fekszik, azt mondjuk, hogy az adott ***kerületi szög az AC ívre támaszkodik.***

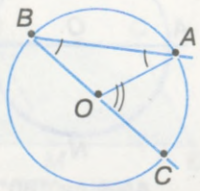


187. ábra

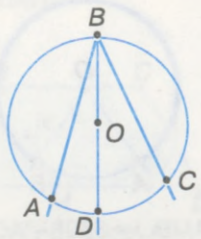
Tantétel (a kerületi szögről).
A kerületi szög egyenlő az azonos ívhez tartozó középponti szög felével. A kerületi szöget a hozzá tartozó ív felével mérjük.

Adva: $ABC\angle$, az O középpontú kör kerületi szöge (188 – 190. ábrák).

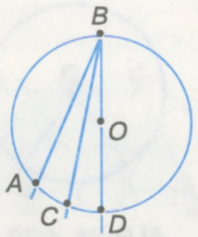
Bebizonyítani: $ABC\angle=\frac{1}{2}AC\cup$.



188. ábra



189. ábra



190. ábra

Bizonyítás. A kör középpontja és a kerületi szög szárai egymáshoz viszonyított helyzetének három esetét vizsgáljuk meg.

1. A kör középpontja a kerületi szög szárán van (188. ábra). Meghúzzuk az OA szakaszt, akkor az AOC középponti szög az $AOB\Delta$ külső szöge lesz. A háromszög külső szögének tulajdonsága alapján $AOC\angle = OBA\angle + OAB\angle$. De $OBA\angle = OAB\angle$, mivel az $AOB\Delta$ egyenlő szárú ($OB = OA = R$). Ezért $AOC\angle = 2ABC\angle$, vagy $ABC\angle = \frac{1}{2} AOC\angle$. Azonban $AOC\angle$ mértéke az $AC\angle$. Tehát az ABC kerületi szög mértéke az AC ív fele.

2. A kör középpontja a kerületi szög belső tartományában fekszik (189. ábra). Meghúzva a BO félegyenest, az adott szöget két szög összegeként adjuk meg: $ABC\angle = ABD\angle + DBC\angle$.
A fentebb bebizonyított első eset alapján az $ABD\angle$ mértéke az AD ív fele, a $DBC\angle$ pedig a DC ív fele. Ezért az $ABC\angle$ mértéke az AD és DC félívek összege, vagyis az AC ív fele.

3. A kör középpontja a kerületi szög külső tartományában fekszik (190. ábra). A BO félegyenest meghúzva kapjuk:

$$ABC\angle = ABD\angle - CBD\angle = \frac{1}{2} AD\cup - \frac{1}{2} CD\cup = \frac{1}{2} AC\cup.$$



191. ábra



192. ábra



193. ábra

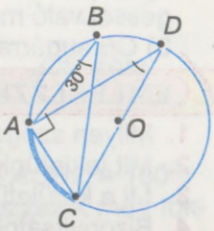
1. következmény.
Az egy és ugyanazon ívre támaszkodó kerületi szögek egyenlők egymással (191. ábra). Valóban, mindegyikük mértéke egy és ugyanazon ív fele.

2. következmény.
Az átmérőre támaszkodó kerületi szög derékszög (192. ábra).
Ennek a szögnek a mértéke a félkör fele, azaz $180° : 2 = 90°$.

? Egyenlők-e a kerületi szögek, ha egyenlő ívekre támaszkodnak (193. ábra)? Igen, mert a szögek mindegyikének mértéke olyan ívek fele, melyeknek fokmértéke egyenlő.

Feladat. A kör AB és BC húrjai 30°-os szöget alkotnak egymással. Határozzátok meg az AC húrt, ha a kör átmérője 10 cm!

Megoldás. Meghúzzuk a CD átmérőt, és összekötjük az A és D pontokat (194. ábra). $ABC\angle = ADC\angle$, mint az AC ívre támaszkodó kerületi szögek (1. következmény).



194. ábra

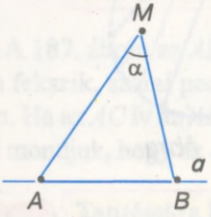
Tehát $ADC\angle = ABC\angle = 30°$. $CAD\angle = 90°$, mint az átmérőre támaszkodó kerületi szög (2. következmény). Ezért az ADC derékszögű háromszögben az AC befogó a 30°-os szöggel fekszik szemben, így a CD átfogó felével egyenlő. Tehát $AC = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (cm).

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk két szög egyenlőségét, igazolnunk kell, hogy olyan azonos kör kerületi szögei, melyek azonos ívre támaszkodnak, vagy ennek a körnek egyenlő íveire.

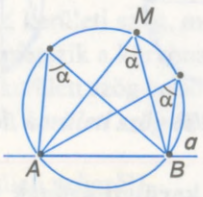
TUDJATOK TÖBBET!

Vizsgáljuk meg a pontok mértani helyét, melyet a bonyolultabb szerkesztési feladatok megoldásánál alkalmazunk.

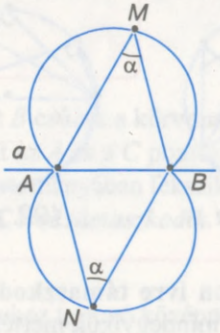
Legyen az AB szakasz az a egyenes része, az M pont az a egyenesen kívül fekvő tetszőleges pont, $AMB\angle = \alpha$ (195. ábra). Azt mondjuk, hogy *az M pontból az AB szakasz α szög alatt látszik.* Ha kört rajzolunk az $AMB\Delta$ köré (196. ábra), akkor az AMB ív bármely pontjából (az A és B pontok kivételével) az AB szakasz α szög alatt látszik (a kerületi szögről szóló tantétel 1. következménye). Mivel a pontot az a egyenes másik oldalán kívül is felvehetjük, ezért létezik egy másik ív, például ANB (197. ábra), melynek mindegyik pontjából (az A és B pontok kivételével) az AB szakasz ugyancsak α szög alatt látszik. Ezért **a pontok mértani helye, amelyekből az *AB* szakasz α szög alatt látszik, egy *AMB* és egy *ANB* ívből álló alakzat az *A* és *B* pontok kivételével.**



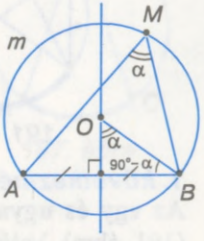
195. ábra



196. ábra



197. ábra



198. ábra

Ahhoz, hogy megszerkesszük a pontok mértani helyét jelentő ívek egyikét az α hegyesszögre:

1) meghúzzuk az AB szakasz felező merőlegesét (198. ábra);
2) a B pontból $90° - \alpha$ szög alatt félegyenest húzunk, melynek a felező merőlegessel való metszéspontja O;
3) OB sugárral kört rajzolunk. Az AMB ív a pontok keresett mértani helye.

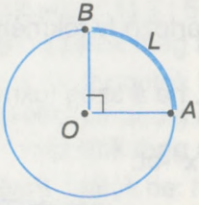
EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Milyen szöget nevezünk középponti szögnek?
2. Mit tekintünk a kör íve fokmértékének?
3. Mi a kerületi szög?
4. Bizonyítsátok be, hogy a kerületi szöget a hozzá tartozó körív felével mérjük!
5. Fogalmazzátok meg a kerületi szögről szóló tantétel következményeit!

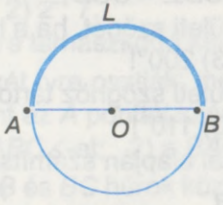
OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

337'. Rajzoljatok O középpontú körvonalat, és jelöljetek meg a körön két A és B pontot. A pontokat kössétek össze a kör középpontjával. Nevezzétek meg a középponti szöget! Jelöljétek azt a két ívet, amelyek ennek a szögnek felelnek meg!

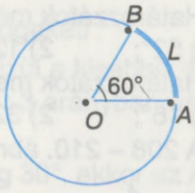
338'. A 199–201. ábrák alapján határozzátok meg az ALB ív fokmértékét!



199. ábra



200. ábra

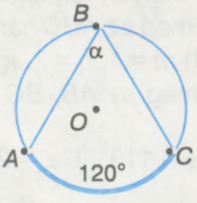


201. ábra

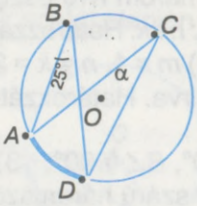
339'. Rajzoljatok O középpontú körvonalat! Jelöljetek ki a körön két A és B pontot úgy, hogy az AB ív mértéke legyen: 1) 70°; 2) 120°; 3) 55°!

340'. Rajzoljatok körvonalat, és húzzátok meg benne az AB átmérőt! Szerkesszetek néhány kerületi szöget, melyek az AB átmérőre támaszkodnak. Mérjétek le a szögeket, hasonlítsátok össze fokmértéküket! Vonjátok le a megfelelő következtetést!

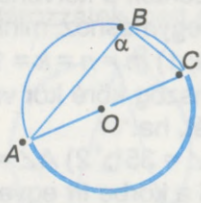
341'. A 202–204. ábrák adatai alapján határozzátok meg az α szög fokmértékét!.



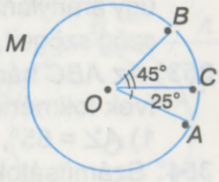
202. ábra



203. ábra



204. ábra



205. ábra

342°. Hány fokos az ív, ha:

1) a kör $\frac{1}{2}$ része; 2) a kör $\frac{1}{3}$ része; 3) a kör $\frac{2}{3}$ része?

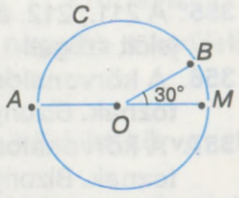
Mekkora a megfelelő középponti szög fokmértéke?

343°. Az AOB középponti szög α. Mennyi a fokmértéke az AOB szögnek megfelelő íveknek, ha:

1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 62°$; 3) $\alpha = 100°$?

344°. A 205., 206. ábrák adatai alapján határozzátok meg:

1) az ACB ív fokmértékét; 2) az AMB ív fokmértékét!



206. ábra

345°. Rajzoljatok O középpontú körvonalat, és jelöljetek meg a körön egy A pontot! Húzzátok meg az AB húrt úgy, hogy:

1) $AOB\angle = 60°$; 2) $AOB\angle = 90°$; 3) $AOB\angle = 120°$; 4) $AOB\angle = 180°$.

Jelöljétek *ki a körvonal AB húrhoz tartozó íveit*, és határozzátok meg fokmértéküket!

346° Az AB átmérőjű félkörön a C és D pontok úgy vannak kijelölve, hogy $AC\cup = 59°$, $BD\cup = 61°$. Határozzátok meg a CD húrt, ha a körvonal sugara: 1) 12 cm; 2) 0,2 dm; 3) 39 mm!

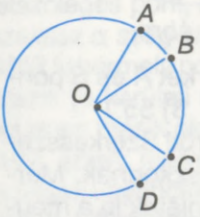
347° Az O középpontú körben az AB és CD ívek egyenlők (207. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $AOC\angle = BOD\angle$!

348° Az O középpontú körvonal ABC és BCD ívei egyenlők (207. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $AOB\angle = COD\angle$!

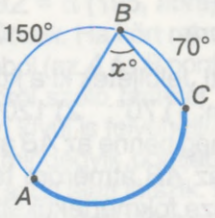
349° Határozzátok meg a kerületi szöget, ha a hozzá tartozó ív fokmértéke: 1) 52°; 2) 126°; 3) 200°!

350° Határozzátok meg a kerületi szöghöz tartozó ívet, ha a szög fokmértéke: 1) 16°; 2) 32°; 3) 110°!

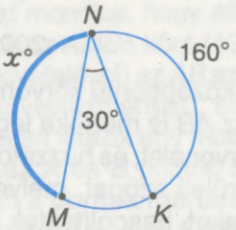
351° A 208 – 210. ábrák adatai alapján számítsátok ki $x°$-ot:



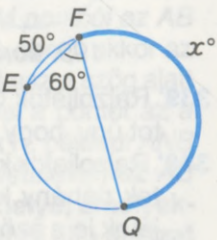
207. ábra



208. ábra



209. ábra

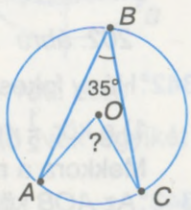


210. ábra

352° Az A, B és C pontok a körvonalat három ívre osztják, melyek fokmértékei úgy aránylanak egymáshoz, mint $m : n : k$. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit, ha: 1) $m = n = k = 1$; 2) $m = 1$, $n = k = 2$; 3) $m = 1$, $n = 2$, $k = 3$!

353° Az ABC háromszög köré kör van írva. Határozzátok meg az AB, BC, AC ívek fokmértékét, ha:
1) $A\angle = 65°$, $C\angle = 35°$; 2) $A\angle = 30°$, $B\angle = 90°$; 3) $B\angle = 110°$, $C\angle = 28°$!

354° Számítsátok ki a körbe írt egyenlő szárú háromszög szögeit, ha a szárakhoz tartozó ív:
1) 64°; 2) 120°; 3) 144°!



211. ábra

355° A 211., 212. ábrák alapján határozzátok meg a „?”-lel jelölt szöget!

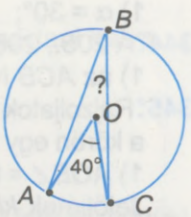
356. **A körvonalon egyenlő ívek egyenlő húrokhoz tartoznak.** Bizonyítsátok be!

357. **A körvonalon egyenlő húrok egyenlő ívekhez tartoznak.** Bizonyítsátok be!

358. **Bizonyítsátok be, hogy a húrra merőleges átmérő felezi a húrhoz tartozó ívet!**

359. **Bizonyítsátok be, hogy az átmérőnél kisebb húr felezőpontján átmenő átmérő felezi a húrhoz tartozó íveket!**

360. A párhuzamos húrok között fekvő ívek egyenlők egymással. Bizonyítsátok be!



212. ábra

361. Az érintő és a vele párhuzamos húr között fekvő ívek egyenlők. Bizonyítsátok be!

362. Az AB húr végpontjai a kört két, ACB és ADB ívre osztják. Határozzátok meg ennek a körnek az ACB és ADB kerületi szögeit, ha:
1) $ACB\cup : ADB\cup = 2 : 3$; 2) $ACB\cup : ADB\cup = 4 : 5$!

363. A P és T pontok a kört két ívre osztják, melyek fokmértékei úgy aránylanak, mint: 1) 3 : 5; 2) 2 : 7.
Határozzátok meg a PT ívre támaszkodó kerületi szögeket!

364. Az A és B pontok a kört két ívre osztják, melyek közül a kisebbik 160°, a nagyobbikat pedig a C pont az A ponttól számítva 2 : 3 arányban osztja.
Határozzátok meg az: 1) $ABC\angle$-et; 2) a $BAC\angle$-et!

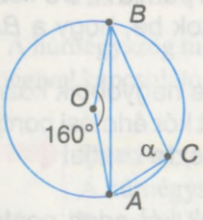
365. Bizonyítsátok be: ha az AB és BC húrok közötti szög 30°, akkor az AC húr egyenlő a kör sugarával!

366. Határozzátok meg az AB és BC húrok által alkotott szöget, ha az AC húr egyenlő a sugárral. Két esetet vizsgáljatok meg!

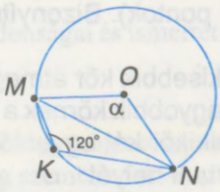
367. A húr két ívre osztja a kört, melyek egyike n-szer nagyobb a másiknál. Határozzátok meg a húrra támaszkodó kerületi szögeket, ha:
1) $n = 3$; 2) $n = 4$!

368. Bizonyítsátok be, hogy az azonos húrra támaszkodó kerületi szögek összege 180°, ha a szögek csúcsai a húr ellentétes oldalain helyezkednek el!

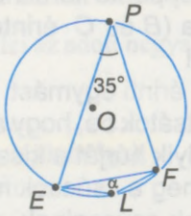
369. A 213–215. ábrák adatai alapján határozzátok meg az α szöget!



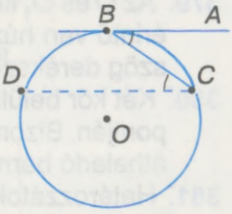
213. ábra



214. ábra



215. ábra



216. ábra

370. Az azonos ívre támaszkodó középponti szög $n°$-kal nagyobb a kerületi szögnél. Határozzátok meg mindkét szög fokmértékét, ha:
1) $n = 35°$; 2) $n = 45°$!

371. **Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű háromszög köré írt körvonal középpontja az átfogó felezőpontjában van!**

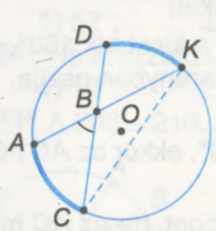
372. Bizonyítsátok be, hogy az átfogóra bocsátott súlyvonal két egyenlő szárú háromszögre osztja a derékszögű háromszöget!

373. **A kör érintője, és az érintési ponton áthaladó húr közötti szög a szárak közötti ív felével egyenlő** (216. ábra). Bizonyítsátok be!

374. A kört $m : n$ arányban osztó húr végpontján át érintő van húzva. Határozzátok meg a húr és az érintő közötti hegyesszöget, ha:
1) $m = 1$, $n = 3$; 2) $m = 2$, $n = 7$!

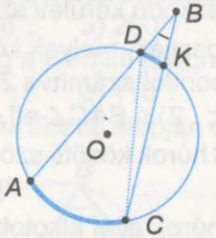
375. **Bizonyítsátok be, hogy a szög, melynek csúcsa a kör középpontjában van, azoknak az íveknek a számtani közepével (félösszegével) egyenlő, melyekre az adott szög, és annak csúcsszöge támaszkodik!** (Használjátok a 217. ábrát!)

376. **Bizonyítsátok be, hogy a szög mértéke, melynek csúcsa a körön kívül van, szárai pedig metszik a kört, a szög szárai között fekvő nagyobbik és kisebbik ívek különbségének felével egyenlő!** (Használjátok a 218. ábrát!)



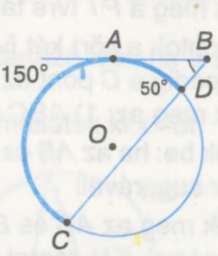
$ABC\angle = \frac{AC\smile + DK\smile}{2}$

217. ábra

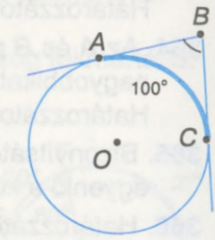


$ABC\angle = \frac{AC\smile - DK\smile}{2}$

218. ábra



219. ábra



220. ábra

377. A 219–220. ábrák adatai alapján határozzátok meg az ABC szöget!

378. Az A, B és C pontok a kört 11 : 3 : 4 arányban osztják. Az A, B és C pontokon keresztül érintők vannak húzva a körhöz kölcsönös metszéspontjukig. Határozzátok meg a keletkezett háromszög szögeit!

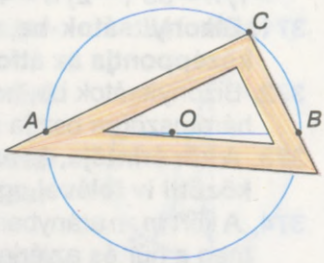
379. Az O és O_1 középpontú körökhöz, melyek külső érintési pontja A, BC közös érintő van húzva (B és C érintési pontok). Bizonyítsátok be, hogy a BAC szög derékszög!

380. Két kör belülről érinti egymást. A kisebbik kör átmegy a nagyobbik középpontján. Bizonyítsátok be, hogy a nagyobbik körnek a két kör érintési pontján áthaladó bármelyik húrját a kisebbik kör két egyenlő részre osztja!

381. Határozzátok meg a csúcsok mértani helyét:
1) a derékszögek csúcsainak, melyek szárai átmennek két adott ponton;
2) az AB közös alapú háromszögek csúcsainak, melyekben az alappal szemben fekvő szög α!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

382. A derékszögű vonalzó pontosságát így ellenőrizték: rajzoltak egy kört, meghúzták benne az AB átmérőt (221. ábra). A vonalzót ráhelyezték a körre úgy, hogy befogói átmenjenek az A és B pontokon. Ha a derékszög csúcsa a körvonalon van, akkor a vonalzó pontos. Magyarázzátok meg, miért!



221. ábra

383. Egy kör alakú korong közepébe lyukat kell fúrni. Hogyan kereshető meg a kör középpontja egyetlen derékszögvonalzóval?



§.9. BEÍRT ÉS KÖRÜLÍRT NÉGYSZÖGEK

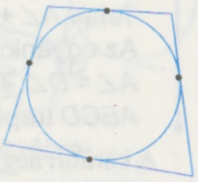
Megjelölünk a körvonalon négy pontot. A pontokat összekötjük húrokkal, amint a 222. ábrán látható. Körbe írt négyszöget kaptunk.



222. ábra

Azt a ***négyszöget***, melynek csúcsai a körvonalon fekszenek, az adott ***körbe írt négyszögnek*** vagy ***húrnégyszögnek*** nevezzük, a kört pedig a ***négyszög köré írt körnek***.

Megjelölünk a körvonalon négy pontot. A pontokon keresztül érintőket rajzolunk, amint a 223. ábra mutatja. Kör köré írt négyszöget, vagy érintőnégyszöget kapunk.

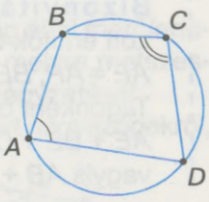


223. ábra

Azt a ***négyszöget***, melynek oldalai a kör érintői, az adott ***kör köré írt négyszögnek*** vagy ***érintőnégyszögnek*** nevezzük, a kört pedig az adott ***négyszögbe írt körnek***.

A húrnégyszög tulajdonságai és ismertetőjelei az adott négyszög szögeivel kapcsolatosak.

Tantétel (a húrnégyszög szögeinek tulajdonsága). A húrnégyszög szemben fekvő szögeinek összege 180°.



224. ábra

Adva: $ABCD$ húrnégyszög (224. ábra).

Bebizonyítani: $A\angle + C\angle = 180°$, $B\angle + D\angle = 180°$.

Bizonyítás. Az A, B, C és D szögek kerületi szögek.

A kerületi szögek tulajdonságairól szóló tantétel alapján:

$A\angle = \frac{1}{2} DCB\cup$, $C\angle = \frac{1}{2} DAB\cup$.

Akkor $A\angle + C\angle = \frac{1}{2}(DCB\cup + DAB\cup) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

A négyszög szögeinek összege 360°, az A és C szögek összege pedig 180°. Ezért $B\angle + D\angle = 360° - (A\angle + C\angle) = 360° - 180° = 180°$.

? Mindegyik négyszög köré írható-e körvonal? A háromszögtől eltérően nem mindegyik négyszög lehet húrnégyszög. Megadjuk a húrnégyszög ismertetőjeléről szóló tantételt bizonyítás nélkül.

Tantétel (a húrnégyszög ismertetőjeléről).
Ha egy négyszög szemben fekvő szögeinek összege 180°, akkor a négyszög köré kör írható.

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú trapéz köré kör írható.

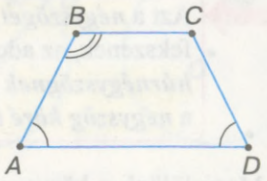
Megoldás. Adott az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz AD és BC alapokkal (225. ábra).

Bebizonyítjuk, hogy $B\angle + D\angle = 180°$.

Bármely trapézban a szárhoz tartozó szögek összege 180° (a párhuzamos egyenesek tulajdonságaiból eredően).

Tehát $A\angle + B\angle = 180°$.

Az egyenlő szárú trapéz tulajdonságai alapján $A\angle = D\angle$. Tehát $B\angle + D\angle = 180°$, a beírt négyszög ismertetőjele alapján az $ABCD$ trapéz köré kör írható.



225. ábra

A körülírt négyszög tulajdonságai és ismertetőjelei az adott négyszög oldalaival kapcsolatosak.

Tantétel (a körülírt négyszög oldalainak tulajdonságáról).
A körülírt négyszög szemben fekvő oldalainak összege egyenlő egymással.

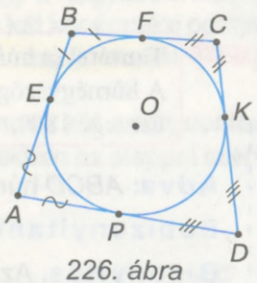
Adva: $ABCD$ kör köré írt négyszög (226. ábra).

E, F, K és P érintési pontok.

Bebizonyítani: $AB + CD = BC + AD$.

Bizonyítás. A körhöz egy pontból húzott érintők tulajdonságai értelmében $AE = AP$, $BE = BF$, $CK = CF$, $DK = DP$.

Tagonként összeadva az egyenlőségeket kapjuk: $AE + BE + CK + DK = AP + BF + CF + DP$, vagyis $AB + CD = BC + AD$.



226. ábra

? Mindegyik négyszögbe írható-e kör? A háromszögtől eltérően nem mindegyik négyszögbe írható kör. Megadjuk a körülírt négyszög ismertetőjeléről szóló tantételt bizonyítás nélkül.

Tantétel (a körülírt négyszög ismertetőjeléről).
Ha egy négyszög szemben fekvő oldalainak összege egyenlő, akkor a négyszögbe kör írható.

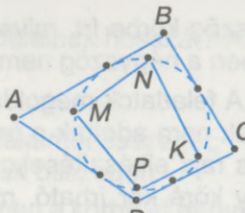
Annak bizonyítására, hogy az *MNKP* (227. ábra) **húrnégyszög, igazolni kell:**

vagy azt, hogy $M\angle + K\angle = 180°$,

vagy azt, hogy $N\angle + P\angle = 180°$.

Annak bizonyítására, hogy az *ABCD* (227. ábra) **körülírt négyszög, igazolni kell, hogy:**

$AB + CD = AD + BC$.



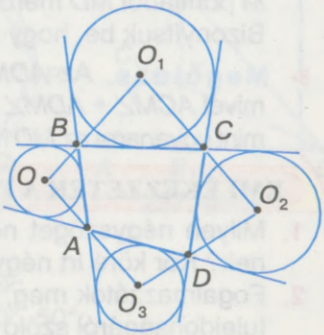
227. ábra

TUDJATOK TÖBBET!

1. A beírt és körülírt körökön kívül vannak még úgynevezett *kívülről írt körök*.

Húzzátok meg egy tetszőleges *ABCD* négyszög külső szögeinek szögfelezőit az *A*, *B*, *C* és *D* csúcsoknál (228. ábra). A szögfelezők *O*, O_1, O_2, O_3 metszéspontjai négy kívülről írt kör középpontjai. A körök mindegyike érinti a négyszög egy oldalát és a két másik oldal meghosszabbítását.

A kívülről írt körök tulajdonsága: középpontjaik egy körbe írt $OO_1O_2O_3$ négyszög (húrnégyszög) csúcsai.



228. ábra

Valóban, az $OO_1O_2\angle = \frac{1}{2}(B\angle + C\angle)$ és $OO_3O_2\angle = \frac{1}{2}(A\angle + D\angle)$,

ezért $OO_1O_2\angle + OO_3O_2\angle = \frac{1}{2}(A\angle + B\angle + C\angle + D\angle) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

Tehát az $OO_1O_2O_3$ négyszög körbe írt négyszög (húrnégyszög).

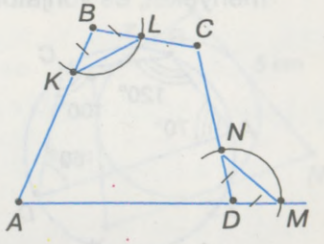
2. Az ógörög tudósok az általunk már ismert tulajdonságok mellett felfedezték még a beírt és körülírt négyszögek néhány érdekes tulajdonságát. Példának álljon itt kettő.

Ptolemaiosz (i. e. II. sz.) **tétele**. A körbe írt négyszög átlóinak a szorzata egyenlő a szemben fekvő oldalaik szorzatának összegével.

Arkhimédész (i. e. III. sz.) **feladata.** Ha a kör köré írt négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor a négy szakasz négyzetének összege, melyre metszéspontjuk osztja az átlókat, egyenlő a körülírt kör átmérőjének négyzetével.

Később (IX.–XIII. század) arab tudósok a körbe írt és a kör köré írt négyszögekről, valamint tulajdonságaik kutatásának új módszereiről közöltek ismereteket.

A tehetséges geométer, Hasszán Ibn al-Haitham (965–1038) kimutatta, hogyan állapítható meg egyetlen körző segítségével, hogy egy négyszög körbe írt. Legyen adva egy *ABCD* négyszög (229. ábra). Meghosszabbítjuk az *AD* oldalt a *D* pont után. Egyenlő körzőnyílással íveket rajzolunk a *B* és *D* pontokból. Ha *KL* = *MN*, akkor az *ABCD*



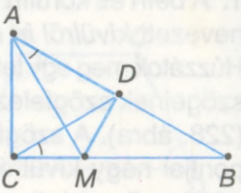
229. ábra

négyszög körbe írt, mivel $ABC\angle + ADC\angle = 180°$ (bizonyítsuk be). Ellenkező esetben a négyszög nem körbe írt.

3. A feladatok megoldása során néha célszerű olyan köröket megvizsgálni, melyek nem adottak a feladat feltételei között. A feladat megoldásához szükséges rajz elkészítésekor először olyan négyszöget rajzolunk, amelybe vagy amely köré kör írható, majd alkalmazzuk a húrok, átmérők, kerületi szögek, középponti szögek stb. tulajdonságait.

Feladat. Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának tetszőleges M pontjából MD merőleges van húzva az AB átfogóra (230. ábra). Bizonyítsuk be, hogy az $MAD\angle = MCD\angle$!

Megoldás. Az $ADMC$ négyszög köré írható kör, mivel $ACM\angle + ADM\angle = 180°$. Tehát $MAD\angle = MCD\angle$, mint ugyanarra az MD ívre támaszkodó kerületi szögek.



230. ábra

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

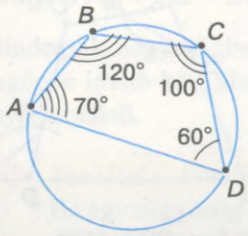
1. Milyen négyszöget nevezünk körbe írt négyszögnek? Kör köré írt négyszögnek?
2. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a körbe írt négyszög szögeinek tulajdonságáról szóló tételt!
3. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a kör köré írt négyszög oldalainak tulajdonságáról szóló tételt!
4. Fogalmazzátok meg a húrnégyszög, illetve az érintőnégyszög ismertetőjeleit!

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

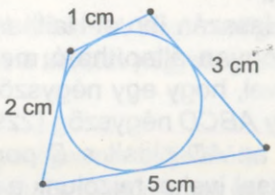
384'. Rajzoljatok kört! Jelöljetek meg a körvonalon négy, A, B, C, és D pontot. Kössétek össze a pontokat szakaszokkal. A kapott $ABCD$ négyszög szögeit mérjétek le szögmérővel. Számítsátok ki az A és C, valamint B és D szemben fekvő szögek fokmértékének összegét! Hasonlítsátok össze a kapott eredményeket, és vonjátok le a megfelelő következtetést!

385'. Helyesen mutatja-e a 231. ábra a négyszög szögeinek fokmértékét? A feleletet nagyarázzátok meg!

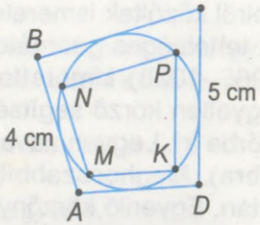
386'. Rajzoljatok kört, és úgy húzzatok négy érintőt a körhöz, hogy körülírt négyszöget kapjatok. Mérjétek le a négyszög oldalait. Számítsátok ki a szemben fekvő oldalak mértékeinek összegét. Hasonlítsátok össze a kapott eredményeket, és vonjátok le a megfelelő következtetést!



231. ábra



232. ábra

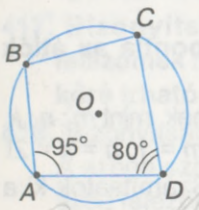


233. ábra

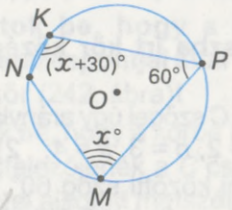
387'. A 232. ábra helyesen mutatja-e a négyszög oldalainak hosszát? A feleletet indokoljátok meg!

388'. A 233. ábra adatai alapján határozzátok meg:
1) az $ABCD$ kör köré írt négyszög AD és BC oldalainak összegét;
2) az $MNPK$ körbe írt négyszög M és P szögeinek összegét!

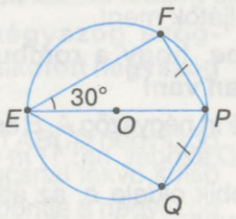
389°. A 234–236. ábrák adatai alapján határozzátok meg a körbe írt négyszögek szögeit!



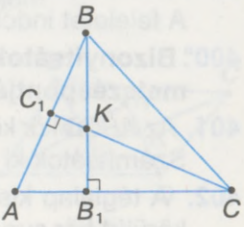
234. ábra



235. ábra



236. ábra



237. ábra

390°. Írható-e kör az $ABCD$ négyszög köré, ha:
1) az A, B, C és D szögek megfelelően egyenlők:
a) 90°, 90°, 110°, 120°; b) 70°, 130°, 110°, 50°;
2) az A, B, C szögek megfelelően egyenlők:
a) 85°, 130°, 95°; b) 60°, 100°, 119°!

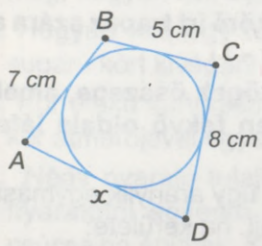
391°. Az ABC háromszögben BB_1 és CC_1 magasságok vannak megrajzolva, melyek a K pontban metszik egymást (237. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az AB_1KC_1 négyszög köré írható kör!

392°. Írható-e kör tetszőleges:
1) téglalap; 2) négyzet; 3) rombusz köré? A feleletet magyarázzátok meg!

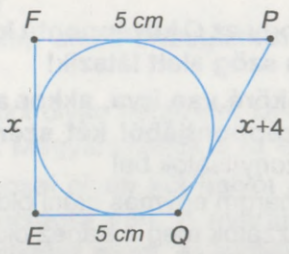
393°. **Bizonyítsátok be, hogy a téglalap köré írt kör középpontja az átlók metszéspontjában van!**

394°. Az AD és a BC a kör átmérői.
1) Bizonyítsátok be, hogy az $ABDC$ négyszög téglalap!
2) Milyen feltétel esetén lesz az $ABDC$ téglalap négyzet?

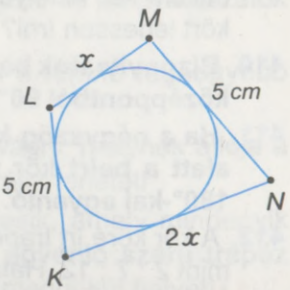
395°. A 238–240. ábrák adatai alapján határozzátok meg a kör köré írt négyszögek ismeretlen oldalainak hosszát!



238. ábra



239. ábra



240. ábra

396°. A kör köré írt négyszög két szemben fekvő oldalának összege s. Számítsátok ki a négyszög kerületét, ha: 1) $s = 20$ cm; 2) $s = 3{,}2$ dm!

397°. Határozzátok meg a kör köré írt négyszög kerületét, melynek oldalai egymás után: 1) 12 cm, 16 cm, 28 cm; 2) 10 cm, 14 cm, 16 cm!

398°. Írható-e kör a négyszögbe, melynek oldalai egymás után: 1) 2 cm, 3 cm, 5 cm, 4 cm; 2) 7 cm, 4 cm, 3 cm, 5 cm hosszúak?

399°. Írható-e kör egy tetszőleges: 1) téglalapba; 2) négyzetbe; 3) rombuszba? A feleletet indokoljátok meg!

400°. Bizonyítsátok be, hogy a rombuszba írt kör középpontja az átlók metszéspontjában van!

401. Az $ABCD$ kör köré írt négyszög A, B és C szögei úgy aránylanak, mint $m : n : k$. Számítsátok ki a D szöget, ha: 1) $m = 2$, $n = 3$, $k = 4$; 2) $m = 1$, $n = k = 2$!

402. A téglalap kisebbik oldala b, az átlói közötti szög 60°. Számítsátok ki a körülírt kör sugarát, ha: 1) $b = 10$ cm; 2) $b = 2{,}3$ dm!

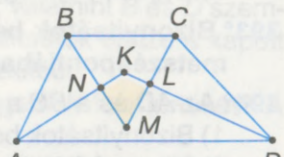
403. Írható-e kör a négyszög köré, ha szögei egymásutánjának aránya: 1) 2 : 4 : 5 : 3; 2) 5 : 7 : 8 : 9?

404. Bizonyítsátok be:
1) a körbe írt trapéz mindig egyenlő szárú;
2) a körbe írt paralelogramma mindig téglalap;
3) a körbe írt rombusz mindig négyzet!

405. Bizonyítsátok be, hogy a körbe írt $ABCD$ négyszög A szöge egyenlő a C csúcsnál fekvő külső szöggel!

406. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ trapéz szögfelezői egymást metszve olyan $MNKL$ négyszöget alkotnak, mely köré kör írható (241. ábra)!

407. Rajzolható-e kör abba a négyszögbe, melynek oldalai egymás után úgy aránylanak, mint: 1) 2, 2, 3, 3; 2) 2, 5, 3, 4?



241. ábra

408. Két egyenlő szárú háromszögnek közös az alapja, csúcsaik pedig az alap két ellentétes oldalán vannak. Írható-e kör az így keletkezett négyszögbe?

409. Két különböző oldalú egybevágó háromszöget miként kell elhelyezni egymáshoz viszonyítva, hogy a kapott négyszögbe kört lehessen írni?

410. Bizonyítsátok be, hogy az O középpontú kör köré írt trapéz szára az O középpontból 90°-os szög alatt látszik!

411. Ha a négyszög kör köré van írva, akkor a szögek összege, amelyek alatt a beírt kör középpontjából két szemben fekvő oldala látszik, 180°-kal egyenlő. Bizonyítsátok be!

412. A kör köré írt trapéz három egymás utáni oldala úgy aránylik egymáshoz, mint 2 : 7 : 12. Határozzátok meg a trapéz oldalait, ha kerülete: 1) 42 mm; 2) 56 cm!

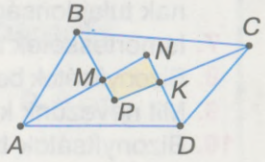
413. Állítsatok össze képletet, és számítsátok ki a kör köré írt trapéz középvonalát, ha kerülete: 1) 16 cm; 2) 200 mm!

414. A kör köré írt egyenlő szárú trapéz szöge 150°, középvonala pedig 40 cm. Határozzátok meg: 1) a trapéz magasságát; 2) a beírt kör sugarát!

415. Szerkesszetek: 1) körbe írt négyzetet; 2) kör köré írt négyzetet!

416. Szerkesszetek téglalapot a köré írt kör R sugara és:
1) a oldala alapján; 2) az átlók közötti α szög alapján!

417.* **Bizonyítsátok be, hogy a négyszög szögfelezőinek metszéspontjai által alkotott négyszög köré írható kör** (242. ábra)!



242. ábra

418.* Bizonyítsátok be, hogy a körbe írt $ABCD$ négyszög A szöge szögfelezőjének a C csúcsnál fekvő külső szög felezőjével alkotott metszéspontja a négyszög köré írt körvonalon van!

419.* Az $ABCD$ négyszög kölcsönösen merőleges átlóinak P metszéspontjából PK, PL, PM, PN merőlegeseket húzva az oldalakra, a K, L, M, N pontok megfelelően az AB, BC, CD, AD oldalakon lesznek. Bizonyítsátok be, hogy a $KLMN$ körbe írt négyszög!

420.* Az egyenlő szárú háromszög szárával párhuzamos egyenes a háromszögből olyan trapézt metsz ki, melynek szára a háromszög alapjának része, és kétszer nagyobb a trapéz kisebbik alapjánál. Lehet-e kört írni ebbe a trapézba?

421.* Ha a trapéz köré, és ugyanezen trapézba kör írható, akkor a trapéz szárainak hossza egyenlő a középvonallal. Bizonyítsátok be!

422.* Szerkesszetek rombuszt a oldala és a beírt kör R sugara alapján!

423.* Szerkesszetek négyszöget a, b és c oldalai valamint a körülírt kör R sugara alapján!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

424. Egy korong szélén egymástól egyenlő távolságra négy lyukat kell fúrni, valamint a középpontját kell átfúrni. Készítsetek rajzot, és magyarázzátok meg, hogyan kell eljárni!

425. Hogyan kell egy téglalap alakú bádoglemezből a lehető legnagyobb sugarú kört kivágni?

426. Kör alakú kartonlemezből olyan négyzetet kell kivágni, melynek átlója a kör átmérőjével egyenlő. Magyarázzátok el az eljárás menetét!

427. Négy nyaraló tulajdonosai olyan kút helyét keresik, amely mindegyik nyaralótól egyenlő távolságra van. A nyaralók egyenlő szárú trapéz csúcsaiba épültek. Készítsetek rajzot, és jelöljétek meg a kút helyét!

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Bizonyítsátok be a négyszög szögeinek összegéről szóló tantételt!
2. Mit nevezünk paralelogrammának?
3. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a paralelogramma oldalainak, szögeinek, átlóinak tulajdonságairól szóló tételeket!
4. Soroljátok fel a paralelogramma ismertetőjeleit!
5. Mi a téglalap? A rombusz? A négyzet? A trapéz? Az egyenlő szárú trapéz?
6. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a téglalap és a rombusz átlóinak tulajdonságairól szóló tantételeket!
7. Ismertessétek a négyzet tulajdonságait!
8. Bizonyítsátok be a háromszög és a trapéz középvonaláról szóló tantételeket!
9. Mit nevezünk középponti és kerületi szögnek?
10. Bizonyítsátok be, hogy a kerületi szöget a hozzá tartozó körív felével mérjük!
11. Milyen négyszöget nevezünk körbe írtnak, illetve kör köré írtnak?
12. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be: a) a kör köré írt négyszög oldalairól szóló tételt; b) a körbe írt négyszög szögeiről szóló tételt!

TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvassátok el a feladatokat, és válasszátok ki az egyetlen helyes feleletet! A tesztfeladat elvégzésére 10–15 perc szükséges.

1. FELADAT

1° Hány fokos a paralelogramma tompaszöge, ha hegyesszögének mértéke 30°?

A. 60°. **B.** 120°. **C.** 150°. **D.** 180°.

2° Milyen feltételek esetén paralelogramma egy négyszög?

A. A két szemben fekvő oldal egyenlő.
B. Az átlók egyike felezi a másik átlót.
C. A két szemben fekvő oldal párhuzamos.
D. Az átlók metszéspontja felezi az átlókat.

3° A téglalap átlója 10 cm és az oldallal 30°-os szöget alkot. A téglalap kisebbik oldala:

A. 15 cm **B.** 5 cm. **C.** 20 cm. **D.** 6 cm.

4 A rombusz kerülete 24 cm, magassága 3 cm. Hegyesszöge:

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 45°.

5* Az $ABCD$ paralelogramma A szögének szögfelezője a BC oldalt a K pontban metszi. $BK = 12$ cm, $KC = 8$ cm. A paralelogramma kerülete:

A. 20 cm. **B.** 40 cm. **C.** 44 cm. **D.** 64 cm.

2. FELADAT

1° Az $ABC\Delta$-ben $BC = 18$ cm. Az AB oldal három egyenlő részre van osztva, és az osztópontokon keresztül az AC oldallal párhuzamosok vannak rajzolva. A párhuzamos egyenesek által a BC oldalból kimetszett szakaszok hossza:

A. 5 cm, 5 cm, 5 cm. **C.** 5 cm, 6 cm, 6 cm.
B. 6 cm, 6 cm, 6 cm. **D.** 4 cm, 4 cm, 4 cm.

2° Az M és N pontok az $ABC\Delta$ AB és BC oldalának felezőpontjai. $MN = 4$ cm. A háromszög AC oldalának hossza:

A. 8 cm. **B.** 12 cm. **C.** 2 cm. **D.** 6 cm.

3° Az $ABCD$ trapéz alapjai AD és BC.
$B\angle = 100°$, $D\angle = 60°$. Az A és C szögek:

A. 30° és 100°. **B.** 70° és 120°. **C.** 80° és 120°. **D.** 45° és 150°.

4 A trapéz egyik alapja 10 cm, középvonala 8 cm.
A másik alap:

A. 6 cm. **B.** 16 cm. **C.** 18 cm. **D.** 2 cm.

5* Az egyenlő szárú trapéz átlója a hegyesszög szögfelezője, alapjai 5 cm és 12 cm hosszúak.
A trapéz kerülete:

A. 17 cm. **B.** 22 cm. **C.** 25 cm. **D.** 27 cm.

3. FELADAT

1° A kerületi szög 150°-os ívre támaszkodik. A szög fokmértéke:

A. 150°. **B.** 75°. **C.** 90°. **D.** 85°.

2° Egy kör 10 cm hosszú húrja 60°-os ívre támaszkodik.
A kör átmérője:

A. 5 cm. **B.** 15 cm. **C.** 20 cm. **D.** 16 cm.

3° A kör köré írt négyszög két szemben fekvő oldalának összege 10 cm.
A négyszög kerülete:

A. 10 cm. **B.** 20 cm. **C.** 30 cm. **D.** 40 cm.

4 Az $ABCD$ beírt négyszög A, B és C szögeinek aránya $1:2:3$.
A D szög fokmértéke:

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 120°. **D.** 90°.

5* A kör köré írt egyenlő szárú trapéz szöge 150°-os, középvonala 6 cm.
A trapéz magassága:

A. 12 cm. **B.** 18 cm. **C.** 3 cm. **D.** 4 cm.

2. FEJEZET

A HÁROMSZÖGEK

A fejezetből ismereteket szereztek:

- az arányos szakaszokról, azok felismeréséről;
- a hasonló háromszögekről, azok tulajdonságairól és ismertetőjeleiről;
- hasonlóság a derékszögű háromszögben, mértani középtételek;
- a háromszög szögfelezőjének tulajdonságáról;
- a hasonlóság alkalmazásáról szerkesztési feladatok megoldásánál



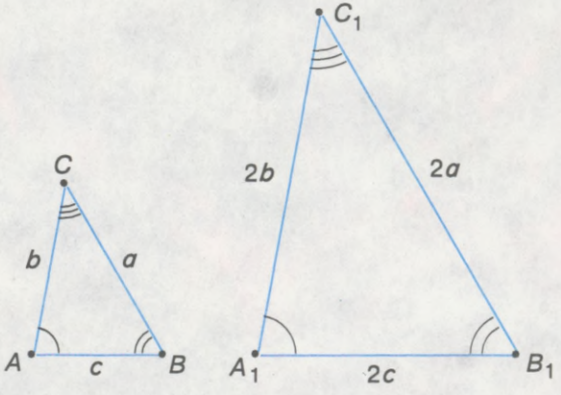
HASONLÓSÁGA





10.§. HASONLÓ HÁROMSZÖGEK

Már tanultátok, hogy az egybevágó háromszögek megfelelő oldalai és szögei egyenlők. Figyeljétek meg a 243. ábrát. Az $A_1B_1C_1\Delta$ szögei egyenlők az $ABC\Delta$ megfelelő szögeivel: $A_1\angle = A\angle$, $B_1\angle = B\angle$, $C_1\angle = C\angle$. Azonban az $A_1B_1C_1\Delta$ oldalai kétszer nagyobbak az $ABC\Delta$ megfelelő oldalainál: $A_1B_1 = 2AB$, $B_1C_1 = 2BC$, $A_1C_1 = 2AC$. Tehát az $A_1B_1C_1\Delta$ nem egybevágó az $ABC\Delta$-gel. Az $A_1B_1C_1$ és ABC háromszögek *hasonlók*.



243. ábra

Mivel $A_1B_1 = 2AB$, ezért felírhatjuk ezeknek az oldalaknak az *arányát*: $\frac{A_1B_1}{AB} = 2$.

Hasonlóképpen: $\frac{B_1C_1}{BC} = 2$, $\frac{A_1C_1}{AC} = 2$. Az arányok mindegyike 2-vel egyenlő, tehát egymással is egyenlők: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$. Ebből a kettős egyenlőségből három aránypár írható fel:

1) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$; 2) $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$; 3) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Azt mondjuk, hogy a hasonló háromszögek megfelelő oldalai *arányosak*.

Két háromszög ***hasonló***, ha megfelelő szögeik egyenlők, és megfelelő oldalaik arányosak.

A megfelelő oldalak arányát kifejező számot *hasonlósági együtthatónak* nevezzük. A hasonlóság arányát általában k-val jelöljük.

Azt írjuk: $A_1B_1C_1\Delta \sim ABC\Delta$, és így olvassuk: „Az $A_1B_1C_1$ háromszög az ABC háromszöggel hasonló." A $\sim$ jel helyettesíti a *hasonló* szót. Ha a háromszögek hasonlósági aránya ismert, akkor azt írjuk:

$A_1B_1C_1\Delta \sim ABC\Delta$ $(k = 2)$ vagy $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$ $(k = \frac{1}{2})$.

A hasonló háromszögek esetében, akárcsak az egybevágó háromszögeknél, lényeges a csúcsok beírásának sorrendje. A 243. ábrán látható háromszögek esetében az $A_1B_1C_1\Delta \sim BAC\Delta$ jelölés helytelen.

Feladat. A 244. ábrán látható háromszögek hasonlók. Határozzuk meg az ismeretlen oldalaikat!

Megoldás. Az adott háromszögekben

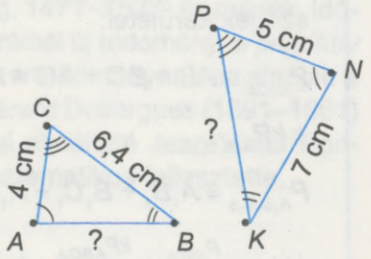
$A\angle = N\angle$, $B\angle = K\angle$, $C\angle = P\angle$.

Felírjuk a megfelelő oldalak arányát:

$$\frac{AB}{NK} = \frac{BC}{KP} = \frac{AC}{NP}.$$

Behelyettesítjük az ismert oldalak hosszát:

$$\frac{AB}{7} = \frac{6{,}4}{KP} = \frac{4}{5}.$$



244. ábra

Egyenlővé tesszük az első és a harmadik arányt, majd a másodikat és a harmadikat.

$\frac{AB}{7} = \frac{4}{5}$, ahonnan $AB = 5{,}6$ cm;

$\frac{6{,}4}{KP} = \frac{4}{5}$, innen $KP = 8$ cm.

A hasonló háromszögek megfelelő oldalai arányának felírásához:

1) meg kell határozni a háromszögek megfelelően egyenlő szögeit;

2) meg kell találni a megfelelő oldalakat;

3) fel kell írni három tört egyenlőségét, ahol a számlálókban az egyik háromszög oldalai, a nevezőkben a másik háromszög megfelelő oldalai szerepelnek.

Lehet-e a hasonlósági együttható 1? Igen. Ebben az esetben a háromszögek megfelelő oldalai egyenlők egymással, azaz a háromszögek egybevágók.

A háromszögek egybevágósága a háromszögek hasonlóságának $k = 1$ arányú részesete.

Feladat. **A hasonló háromszögek kerületeinek aránya egyenlő megfelelő oldalaik arányával.** Bizonyítsuk be!

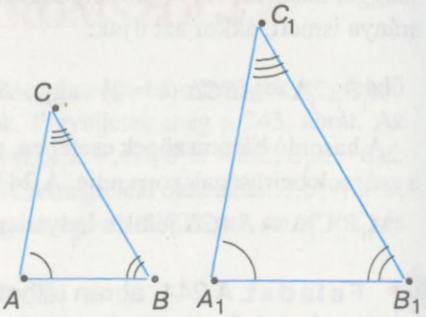
Megoldás. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlók, hasonlósági együtthatójuk k (245. ábra).

Bebizonyítjuk, hogy $\frac{P_{ABC\Delta}}{P_{A_1B_1C_1\Delta}} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Mivel $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$,

akkor $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $AC = kA_1C_1$.

Az ABC és $A_1B_1C_1$ hasonló háromszögek kerületei:



245. ábra

$$P_{ABC\Delta} = AB + BC + AC = kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1 = k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1) =$$

$$= kP_{A_1B_1C_1\Delta},$$

$$P_{A_1B_1C_1\Delta} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1.$$

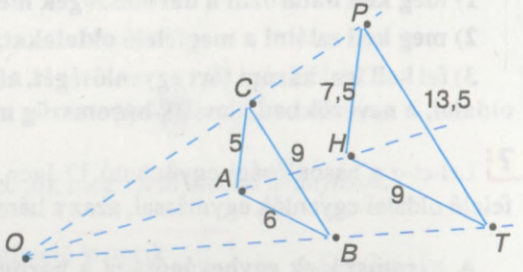
Akkor $\frac{P_{ABC\Delta}}{P_{A_1B_1C_1\Delta}} = \frac{kP_{A_1B_1C_1\Delta}}{P_{A_1B_1C_1\Delta}} = k$ vagy $\frac{P_{ABC\Delta}}{P_{A_1B_1C_1\Delta}} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

TUDJATOK TÖBBET!

1. A *hasonló* szó jelentése: aminek vannak közös vonásai valamivel, hasonlatos valakire, valamire. Ezt a terminust gyakran használjuk a mindennapi életben, a tudományban, a termelésben. Például a háromszög alakú kendő 1:10 arányban elkészített rajza és a szabásminta, ami szerint természetes nagyságban elkészítik, hasonló háromszögek. A szabásminta és a kész kendő pedig egybevágó háromszögek.

2. Az ókori görög matematikusok a *hasonló* szakkifejezés helyett a *hasonlatos* szót használták. A hasonlóság $\sim$ jelét Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) vezette be 1679-ben.

3. A 246. ábrán két ABC és HTP hasonló háromszög látható, melyek oldalai párhuzamosak, az AH, BT és CP egyenesek, melyek átmennek a



246. ábra

megfelelő csúcsokon, az *O* pontban metszik egymást. Azt mondjuk, hogy az ilyen *ABC* és *HTP* hasonló háromszögek *perspektivikus elhelyezkedésűek*.A perspektíva fogalma réges-régen ismert, azonban a vele kapcsolatos tudományos elméletek csak a reneszánsz idejében kezdtek fejlődni. A perspektivikus ábrázolás a reneszánsz kor nagy vívmánya: alkalmazásával tudtak a festők képeiken térhatást kelteni. A perspektivikus ábrázolás a térbeli tárgyak sík felületre történő leképzése. Az első művész, akinek ez sikerült, a firenzei Giotto di Bondone (1266–1337). Ebben a korban kezdődött a perspektíva tudományos alapjainak keresése is. Az elsőség ezen a téren ugyancsak egy firenzeit, Filippo Brunelleschi-t (1377–1446) illeti. A perspektíva tudományát fejlesztették, és aktívan alkalmazták olyan kiváló művészek, mint Leonardo da Vinci (Itália, 1471–1528), Albrecht Dürer (Németország, 1471–1528) és mások. Idővel a perspektíva mértani csíráiból új tudomány, a *projektív geometria* fejlődött ki. Ennek a tudománynak az alapjait a francia építész és mérnök, Gérard Desargues (1591–1661) rakta le, szigorú matematikai elméletté Jean-Victor Poncelet (1788–1867) francia matematikus fejlesztette.



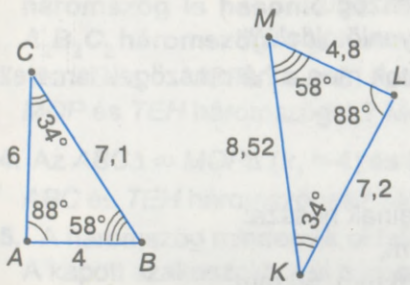
Gérard Desargues

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

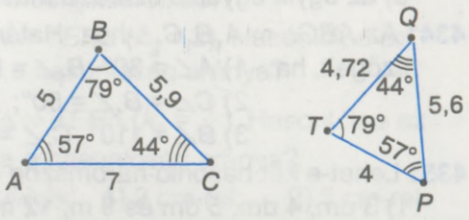
1. Milyen háromszögeket nevezünk hasonlóknak?
2. Hogy írjuk le: két háromszög között *k* arányú hasonlóság áll fenn?
3. Magyarázzátok meg, hogyan állítjuk össze két hasonló háromszög megfelelő oldalainak arányát!
4. Mennyi az egybevágó háromszögek hasonlósági együtthatója?
5. Milyen a hasonló háromszögek kerületeinek aránya?

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

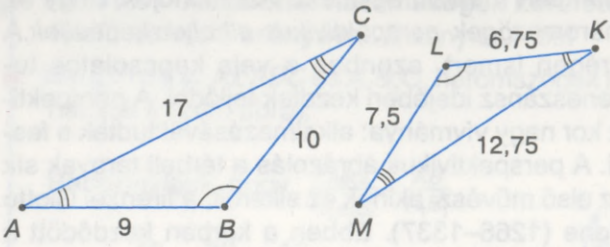
428'. Nevezzétek meg a 247. és 248. ábrán látható hasonló háromszögeket! Írjátok fel: 1) megfelelő szögeiket; 2) megfelelő oldalaikat!



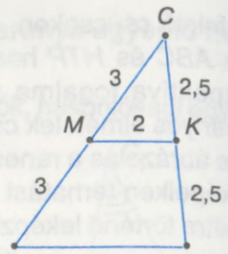
247. ábra



248. ábra



249. ábra

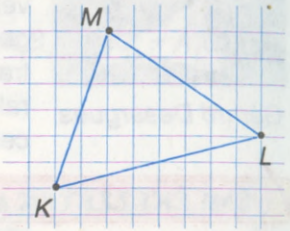


250. ábra

429'. Az alábbi háromszögek hasonlók: 1) ABC és KLM (249. ábra);
2) ABC és MKC (250. ábra).
Írjátok le a megfelelő oldalak arányát! Határozzátok meg a hasonlóság arányát! Végezzétek el a megfelelő beírásokat!

430'. A négyzetrácsok alapján rajzoljátok meg először a KLM háromszöget (251. ábra), majd a $KBC\Delta \sim KLM\Delta$-et, ha:

1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = \frac{2}{3}$!



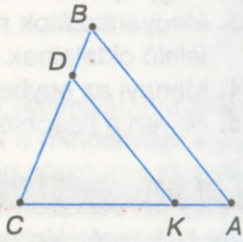
251. ábra

431'. Számítsátok ki az alábbi ábrákon látható hasonló háromszögek kerületét:
1) 247; 2) 248; 3) 249; 4) 250!
Határozzátok meg a hasonló háromszögek kerületeinek arányát!

432°. A 252. ábrán látható $ABC\Delta \sim KDC\Delta$. Válasszatok ki olyan szakaszpárokat, hogy teljesüljenek az alábbi aránypárok!

1) $\frac{KD}{AB} = \ldots$; 2) $\frac{AC}{KC} = \ldots$; 3) $\frac{BC}{DC} = \ldots$.

Hány ilyen szakaszpár választható ki?



252. ábra

433°. Hasonlók lehetnek-e a háromszögek, ha:
1) az egyik hegyesszögű, a másik tompaszögű;
2) az egyik derékszögű, a másik tompaszögű;
3) az egyik egyenlő szárú, a másik egyenlő oldalú?

434°. Az $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$-höz. Határozzátok meg a háromszögek ismeretlen szögeit, ha: 1) $A\angle = 30°$, $B_1\angle = 60°$;
2) $C\angle = B_1\angle = 50°$;
3) $B\angle = 110°$, $C_1\angle = 25°$!

435°. Lehet-e két hasonló háromszög oldalainak hossza:
1) 3 dm, 4 dm, 5 dm és 9 m, 12 m, 15 m;
2) 1,2 cm, 1,3 cm, 2,5 cm és 24 mm, 26 mm, 50 mm;
3) 5 mm, 50 cm, 50 cm és 5 cm, 50 mm, 50 mm?

436° Az $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$-höz. Határozzátok meg az AC és B_1C_1 oldalakat, ha:
1) $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, $A_1B_1 = 56$ mm, $A_1C_1 = 42$ mm;
2) $AB = 13$ cm, $BC = 14$ cm, $A_1B_1 = 3{,}9$ dm, $A_1C_1 = 4{,}5$ dm;
3) $AB = 40$ mm, $BC = 37$ mm, $A_1B_1 = 20$ cm, $A_1C_1 = 6{,}5$ cm!

437° **A háromszög két oldalát metsző egyenes, mely a háromszögből vele hasonló háromszöget metsz ki, párhuzamos a harmadik oldallal.** Bizonyítsátok be!

438° Egy egyenes az ABC háromszög két oldalát az M és N pontokban metszi, és abból hasonló háromszöget metsz ki. Jelöld meg a keletkezett párhuzamos egyeneseket, ha: 1) $M \in AB$ és $N \in BC$; 2) $M \in AC$ és $N \in BC$; 3) $M \in AC$ és $N \in AB$!

439° Egy háromszög oldalai a, b és c, kerülete P. A háromszög hasonló egy P_1 kerületű háromszöghöz, a hasonlóság aránya k. Töltsétek ki a 16. táblázatot!

16. táblázat

a	12 cm	20 cm	8 cm	
b	16 cm	21 cm		8 cm
c	18 cm		17 cm	14 cm
P				
P_1		140 cm	100 cm	12,4 cm
k	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$

440° Határozzátok meg annak az egyenlő oldalú háromszögnek az oldalait, melynek a vele hasonló háromszöggel az aránya 4 és a kerülete:
1) 36 cm; 2) 45 cm; 3) 72 cm!

441. Egy háromszög oldalainak aránya 3:5:7. Határozzátok meg a vele hasonló háromszög oldalait, ha:
1) kisebbik oldala 5 cm;
2) kerülete 45 cm!

442. **Ha az $A_1B_1C_1$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, és az $A_2B_2C_2$ háromszög is hasonló az ABC háromszöghöz, akkor az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek is hasonlók.** Bizonyítsátok be!

443. Az $ABC\Delta \sim MOP\Delta$ ($k_1 = 3$) és $ABC\Delta \sim TEH\Delta$ ($k_2 = 2$). Hasonlók-e az MOP és TEH háromszögek? Mennyi a hasonlóság aránya?

444. Az $ABC\Delta \sim MOP\Delta$ ($k_1 = 4$) és $MOP\Delta \sim TEH\Delta$ ($k_2 = \frac{1}{2}$). Hasonlók-e az ABC és TEH háromszögek? Mekkora a hasonlóság aránya?

445. A háromszög mindegyik oldalát növelték: 1) 2 cm-rel; 2) 5 cm-rel. A kapott szakaszokból új háromszöget szerkesztettek. A kapott háromszög lehet-e hasonló az adott háromszöghöz?

446. A háromszög mindegyik oldalát növelték:
1) hosszának egyharmadával; 2) hosszának 25%-ával.
Szerkeszthető-e a kapott szakaszokból háromszög?
A kapott háromszög hasonló-e az adott háromszöghöz?

447. Az egyenlő szárú háromszög két oldala a és b. Mekkora a háromszöghöz a k arányban hasonló háromszög harmadik oldala, ha:
1) $a = 12$ cm, $b = 5$ cm, $k = 0{,}5$;
2) $a = 6$ cm, $b = 15$ cm, $k = 2{,}5$?

448. Határozzátok meg a hasonló háromszögek kerületeit, ha megfelelő oldalaik aránya $m : n$, kerületeik különbsége pedig a, ha:
1) $m : n = 7 : 4$, $a = 48$ cm;
2) $m : n = 2 : 3$, $a = 15$ cm!

449. A trapéz alapjai a és b, egyik szára c. A szárak meghosszabbításai O pontban metszik egymást. Két hasonló háromszöget kaptak, melyek közös csúcsa O. Mennyivel kellett meghosszabbítani a c hosszúságú szárat, ha:
1) $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 6$ cm;
2) $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm?

450.* Az egyenlő oldalú háromszög oldalait először n-szer növelték, majd n-szer csökkentették. Az adott háromszöggel hasonló háromszöget kaptak. Menynyi a hasonlóság aránya az első és a harmadik háromszög között?

451.* Két hasonló derékszögű háromszög hegyesszöge 30°. Az egyik háromszög átfogója a másik háromszög kisebbik befogójával egyenlő. Határozzátok meg a két háromszög hasonlósági együtthatóját!

452.* Az egyenlő szárú háromszög alapja n-szer kisebb a száránál, kerülete P. Határozzátok meg a k hasonlósági együtthatójú hasonló háromszög oldalait, ha:
1) $n = 2$, $P = 50$ cm, $k = 1{,}5$;
2) $n = 3$, $P = 35$ cm, $k = 0{,}75$!

453.* Két hasonló háromszög legnagyobb oldalai a_1 és a_2, kerületük különbsége $P_2 - P_1 = m$. Bizonyítsátok be, hogy $P_1 = \frac{ma_1}{a_2 - a_1}$ és $P_2 = \frac{ma_2}{a_2 - a_1}$!

454.* Két hasonló háromszög oldalait páronként összeadták, és a kapott három szakaszból új háromszöget szerkesztettek. Hasonló-e a kapott háromszög a két adott háromszöghöz?

455.* Léteznek-e olyan hasonló háromszögek, melyekben az egyik háromszög két oldalának aránya egyenlő a másik háromszög megfelelő oldalai négyzetének arányával?

456.* Bizonyítsátok be, hogy a háromszög oldalai felezőpontján átmenő kör sugara a háromszög köré írt kör sugarának felével egyenlő!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

457°. Az egyenlő oldalú háromszöget, melynek oldala 0,1 mm, 40-szeres nagyítású mikroszkóp alatt vizsgálják. Hányszorosára növekednek a háromszög szögei?

458. Végezzetek méréseket és állapítsátok meg, hasonlók-e a derékszögvonalzó belső és külső háromszögei!

459. A földrajzi térképen három település egymástól 6 cm, 5 cm és 4 cm távolságra van. A valóságban a települések közötti legnagyobb távolság 15 km. Határozzátok meg a többi település közötti távolságot! Milyen a térkép méretaránya?

460. Ha a trapéz alakú acéllemezhez, melynek alapjai 15 cm és 25 cm, szárai pedig 18 cm és 20 cm hosszúak, háromszög alakú acéllemezt illesztünk, melynek alapja 15 cm, háromszög alakú acéllemezt kapunk. Állapítsátok meg a kapott lemez méreteit!

461. A szalagból készült fenyőfát három egyenlő oldalú hasonló háromszög alkotja. A háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, vízszintes oldalaikra húzott magasságaik egy egyenesre illeszkednek. Elegendő-e 2,5 m szalag egy 40 cm alapú ilyen fenyőfa elkészítéséhez, ha a háromszögek hasonlósága $\frac{1}{2}$ arányú? Hány méter szalag szükséges ahhoz, hogy osztálytermetek ablakainak függönyeit ilyen karácsonyfákkal díszítsétek?





11. §. THALÉSZ TÉTELÉNEK ÁLTALÁNOSÍTÁSA. PÁRHUZAMOS SZELŐK TÉTELE

Thalész tétele kimondja, hogy a párhuzamos egyenesek a szög száraiból megfelelően egyenlő szakaszokat metszenek ki. Általánosabb az az eset, amikor a párhuzamos egyenesek a szög száraiból arányos szakaszokat metszenek ki (253. ábra). A megfelelő tétel Thalész általános tételeként vagy másképpen a párhuzamos szelők tételeként ismert. A tételt bizonyítás nélkül ismertetjük.

Tantétel (Thalész tételének általánosítása).
A szög szárait metsző párhuzamos egyenesek a szög száraiból arányos szakaszokat metszenek ki.

Ezt a tételt a *párhuzamos szelők tételének* is nevezik.

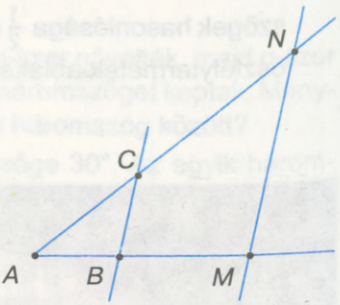
Következmény. **A háromszög bármely oldalával párhuzamos egyenes a háromszögből vele hasonló háromszöget metsz ki.**

Valóban, az ABC és MNC háromszögekben (254.ábra) C szög közös szárait az AB és MN párhuzamos egyenesek metszik. Az AC metsző egyenessel a párhuzamosok CAB és CMN egyállású, tehát egyenlő szögeket alkotnak. A háromszögek harmadik szögei ugyancsak egyenlők. Bebizonyítjuk a háromszögek oldalainak arányosságát. Thalész tétele alapján $\frac{AM}{MC} = \frac{BN}{NC}$, ezért $\frac{AM + MC}{MC} = \frac{BN + NC}{NC}$, ahonnan $\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC}$. Meghúzva az $NK \parallel AC$, hasonlóan kapjuk: $\frac{BC}{NC} = \frac{BA}{KA}$. Azonban $KA = MN$, ezért $\frac{BC}{NC} = \frac{BA}{MN}$.

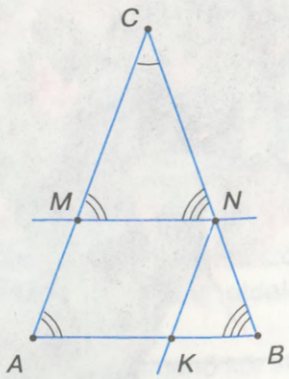
Tehát az ABC és MNC háromszögekben a megfelelő szögek egyenlők, a megfelelő oldalak arányosak:

$$\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC} = \frac{BA}{MN}.$$

Az adott háromszögek hasonlók a meghatározás szerint.



253. ábra



254. ábra

Hogy bebizonyíthassuk a háromszögek hasonlóságát:

1) be kell bizonyítani az adott háromszögek megfelelő szögeinek egyenlőségét;

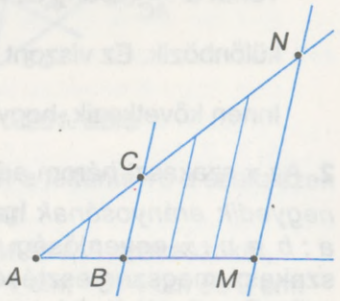
2) be kell bizonyítani az adott háromszögek megfelelő oldalainak arányosságát;

3) le kell vonni a következtetést: a háromszögek hasonlók a meghatározás szerint.

TUDJATOK TÖBBET!

1. Felmerülhet a kérdés: *hogyan bizonyítható be Thalész tételének általánosítása?*

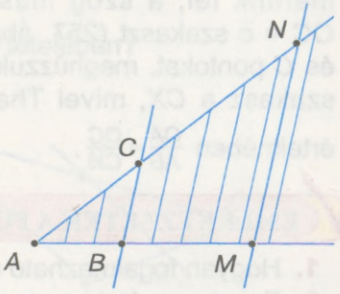
Osszuk fel az AB szakaszt n egyenlő részre (255. ábra)! Legyen mindegyik szakasz hossza d. Akkor $AB = dn$. A B pontból d hosszúságú szakaszokat mérünk a BM félegyenesre. Az osztópontokon keresztül BC-vel párhuzamosokat húzunk. Thalész tétele szerint ezek a párhuzamosok egyenlő szakaszokat metszenek ki az adott szög AC szárán. Jelöljük d_1-gyel ezeknek a szakaszoknak a hosszát. Az AC szakaszon is n ilyen szakasz lesz, ezért $AC = d_1 n$.



255. ábra

A BM szakaszon m ilyen szakasz fér el (255. ábra). A CN szakaszon ugyancsak m szakasz lesz. Akkor $BM = dm$, $CN = d_1 m$.

A szakaszok aránya a szög szárain: $\frac{AB}{BM} = \frac{n}{m}$, $\frac{AC}{CN} = \frac{n}{m}$.



256. ábra

Látjuk, hogy a két arány ugyanazzal az $\frac{n}{m}$ számmal egyenlő, tehát egyenlővé tehetők: $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$.

Legyen rámérhető a BM szakaszra m, d hosszúságú szakasz a d szakasznál rövidebb maradékkal (256. ábra). Ez azt jelenti, hogy az m, d hosszúságú szakaszt tartalmazó szakasz kisebb a BM szakasznál, az $m + 1$, d hosszúságú szakaszt tartalmazó szakasz nagyobb, mint BM.

Kaptunk egy egyenlőtlenséget: $dm < BM < d(m + 1)$.

Mivel $d = \frac{AB}{n}$, ezért $\left(\frac{AB}{n}\right)m < BM < \left(\frac{AB}{n}\right)(m + 1)$.

Elosztjuk az egyenlőtlenség mindegyik tagját AB-vel: $\frac{m}{n} < \frac{BM}{AB} < \frac{m+1}{n}$, vagy $\frac{m}{n} < \frac{BM}{AB} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. Ha növeljük az osztópontok számát, az n szám végtelenül naggyá válik, az $\frac{1}{n}$ szám pedig a nullához közeli lesz. Ezért a $\frac{BM}{AB}$ arány az $\frac{m}{n}$ számnál csak az $\frac{1}{n}$ igen kis számmal különbözik.

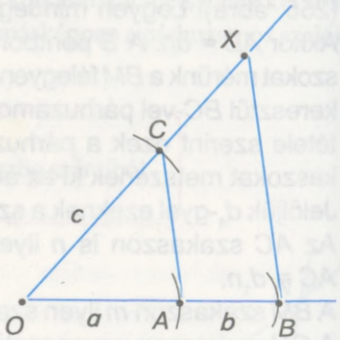
Hasonló meggondolással kapjuk, hogy: $d_1 m < CN < d_1(m+1)$; ha $d_1 = \frac{AC}{n}$:

$\left(\frac{AC}{n}\right)m < CN < \left(\frac{AC}{n}\right)(m+1)$ és $\frac{m}{n} < \frac{CN}{AC} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$.

Tehát a $\frac{CN}{AC}$ arány az $\frac{m}{n}$ számtól ugyanazzal az $\frac{1}{n}$ nagyon kicsi számmal különbözik. Ez viszont csak akkor lehetséges, ha $\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}$.

Innen következik, hogy $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$.

2. Az x szakaszt három adott, *a, b és c* szakasz *negyedik arányosának* nevezik, ha teljesül az $a : b = c : x$ egyenlőség. A negyedik arányos szakasz megszerkesztéséhez egy tetszőleges szög O csúcsából $OA = a$, $AB = b$ szakaszokat mérünk fel, a szög másik szárára pedig az $OC = c$ szakaszt (257. ábra). Összekötjük az A és C pontokat, meghúzzuk $BK \parallel AC$. A keresett szakasz a CX, mivel Thalész általános tétele értelmében $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CX}$.



257. ábra

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

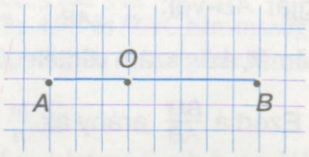
1. Hogyan fogalmazható meg a párhuzamos szelők tétele?
2. Fogalmazzátok meg a Thalész tételének általánosításából eredő következményt!
3. Magyarázzátok meg, hogyan bizonyítható két háromszög hasonlósága a meghatározás szerint!

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

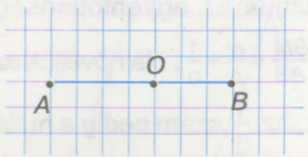
462'. A 258. és 259. ábrák alapján határozzátok meg, milyen arányban osztja az O pont az AB szakaszt!

463'. Az M pont a PH szakaszt adott arányban osztja. A PM vagy az MH szakasz hosszabb, ha:

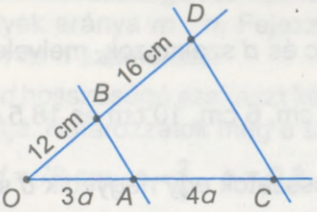
1) $PH : MH = 5 : 2$; 2) $PH : MH = 3 : 7$?



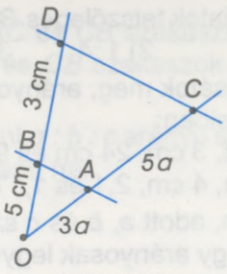
258. ábra



259. ábra



260. ábra

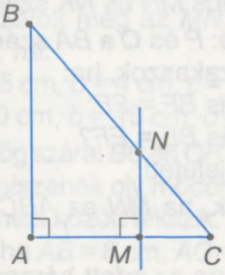


261. ábra

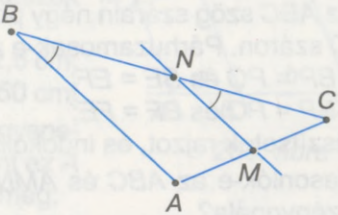
464'. A 260. és 261. ábrákon $AB \parallel CD$. Helyesen van-e feltüntetve a szakaszok hossza az ábrákon? A feleletet indokoljátok meg!

465'. Az ABC szög BA szárára mérjetek fel olyan BM és MA szakaszokat, melyek hossza: 1) 2 cm és 3 cm; 2) 5 cm és 1 cm; 3) 4 cm és 2 cm! Az A és M pontokon keresztül húzzatok AC és MH párhuzamosokat! Milyen a BH és HC szakaszok aránya?

466'. Hány szakasz szerepel az arányos szakaszok tételében?



262. ábra

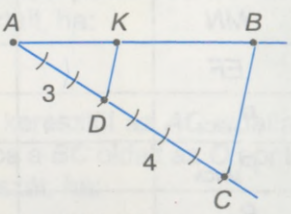


263. ábra

467'. A 262. és 263. ábrákon az MN párhuzamos az ABC háromszög AB oldalával. Hasonlók-e az ABC és MNC háromszögek? A feleletet magyarázzátok meg!

468°. A d hosszúságú AB szakaszt az M pont $m : n$ arányban osztja. Határozzátok meg az AM és BM szakaszok hosszát, ha:
1) $d = 10$ cm, $m = 2$, $n = 3$; 2) $d = 16$ cm, $m = 3$, $n = 1$;
3) $d = 14$ cm, $m = 3$, $n = 4$!

469°. Rajzoljatok a füzetbe 12 négyzetnyi hosszúságú AB szakaszt! Osszátok fel a négyzetek alapján:
1) 1 : 2; 2) 5 : 7; 3) 2 : 3 arányban!



264. ábra

470°. Az adott AB szakaszt osszátok fel 3 : 4 arányban! A 264. ábra alapján állítsátok össze a szerkesztés tervét!

471°. Rajzoljatok tetszőleges BC szakaszt, és osszátok fel az alábbi arányokban:
1) 2:3; 2) 1:4; 3) 2:5!

472°. Állapítsátok meg, arányosak-e az a, b, c és d szakaszok, melyek hossza megfelelően:
1) 8 cm, 3 cm, 24 cm és 9 cm; 2) 5 cm, 6 cm, 10 cm és 18,5 cm;
3) 7 cm, 4 cm, 2,1 és 1,1 cm!

473°. Három, adott a, b és c szakaszhoz válasszatok egy negyedik d szakaszt úgy, hogy arányosak legyenek!
Az adott szakaszok hossza megfelelően:
1) 1, 2, 3; 2) 6, 3, 4; 3) 3, 5, 7.
Hány megoldása van a feladatnak?

474°. Rajzoljatok a füzetbe 9 négyzet hosszúságú AB szakaszt! Jelöljetek meg rajta egy C pontot a négyzetnyi távolságra az A ponttól. Rajzoljatok AC és CB szakaszokat a négyzetrácsok alapján, ha:
1) $a = 2$; 2) $a = 3$; 3) $a = 4$!

475°. Az AB és BC szakaszok egy egyenesen fekszenek, hosszuk:
1) 2 cm és 3 cm; 2) 1,5 cm és 6 cm; 3) 5 cm és 4 cm.
Szerkesszetek a két adott szakasszal arányos MN és NK szakaszt!

476°. Az ABC szög szárain négy pont van felvéve: P és Q a BA száron, E és F a BC száron. Párhuzamosak-e a PE és QF szakaszok, ha:
1) $BP = PQ$ és $BE = EF$; 2) $BQ = QP$ és $BF = FE$;
3) $BP = PQ$ és $BF = FE$; 4) $BQ = QP$ és $BE = EF$?
Készítsetek rajzot, és indokoljátok meg a feleletet!

477°. Hasonlók-e az ABC és AMN háromszögek, ha MN az ABC háromszög középvonala?

478°. Hogyan szerkeszthető legegyszerűbb módon az adott háromszöggel hasonló háromszög?

479°. Az ABC egyenlő oldalú háromszög $AB = a$ oldalával párhuzamosan két egyenes van húzva, melyek az AC oldalt M és E, a BC oldalt megfelelően N és F pontokban metszik. $MN = \frac{3}{4}a$, $EF = \frac{1}{2}a$. Rajzoljátok át a munkafüzetbe a 17. táblázatot és töltsétek ki!

17. táblázat

AB	4 cm					
MN		6 cm				
EF			3 cm			
$P_{ABC\triangle}$				12 cm		
$P_{MNC\triangle}$					9 cm	
$P_{EFC\triangle}$						10 cm

480. Az a hosszúságú AB szakaszt a C pont AC és CB szakaszokra osztja, melyek aránya $m : n$. Fejezzétek ki az AC és CB szakaszok hosszát az a, m és n számokkal!

481. A d hosszúságú szakaszt két rajta fekvő pont $a : b : c$ arányú szakaszokra osztja. Határozzátok meg a szakaszok hosszát, ha:

1) $d = 78$ cm, $a = \frac{2}{5}$, $b = 0{,}8$, $c = \frac{3}{4}$;

2) $d = 50$ cm, $a = 0{,}25$, $b = \frac{3}{5}$, $c = 0{,}4$!

Ha az arány tagjai törtekkel vannak megadva, hozzátok a törteket közös nevezőre. A kapott törtek számlálói az arány tagjai egész számú értékeinek felelnek meg.

482. Az AB szakasz d hosszúságú meghosszabbításán úgy van felvéve egy N pont, hogy $AN : BN = m : n$. Határozzátok meg az AN és BN szakaszok hosszát, ha:

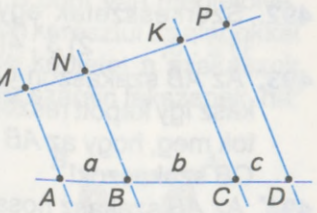
1) $d = 5$ cm, $m = 3$, $n = 2$;

2) $d = 16$ cm, $m = 5$, $n = 1$!

483. A 265. ábrán $AM \parallel BN \parallel CK \parallel DP$.
Határozzátok meg az MN, NK, KP szakaszok hosszát, ha:

1) $a = 2{,}5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 2$ cm, $MP = 12{,}5$ cm;

2) $a = 10$ cm, $b = 16$ cm, $c = 8$ cm, $MP = 50$ cm!



265. ábra

484. Az A szög szárai BC és OH párhuzamos egyeneseket metszenek oly módon, hogy a B pont az A és O pontok között fekszik. Határozzátok meg:

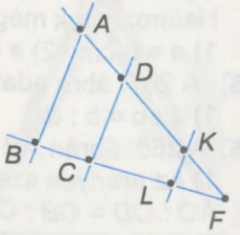
1) AH-t, ha $AB = 8$ cm, $AO = 12$ cm, $AC = 10$ cm;

2) AO-t, ha $AC : AH = \frac{3}{11} : 0{,}6$, $BO = 12$ dm!

485. A 266. ábrán $AB \parallel DC \parallel KL$, $AD : DK : KF = 2 : 3 : 2$. Határozzátok meg a BC, CL, LF, DC és KL szakaszok hosszát, ha:

1) $AB = 70$ mm, $FC = 40$ mm;

2) $AB = 21$ cm, $FC = 15$ cm!



266. ábra

486. Az MON háromszög MO oldalán az A pont O csúcstól a távolságra van. Határozzátok meg a szakaszok hosszát, melyekre az A ponton átmenő, az MN oldallal párhuzamos egyenes osztja az ON oldalt, ha:

1) $MO = 6$ cm, $ON = 9$ cm, $a = 2$ cm;

2) $MO = 10$ cm, $ON = 14$ cm, $a = 4$ cm!

487. Az ABC háromszög AB oldalán fekvő P ponton keresztül az AC oldallal párhuzamos egyenes van húzva. Ez a párhuzamos a BC oldalt az O pontban metszi. Határozzátok meg a BO szakasz hosszát, ha:

1) $AP : PB = 5 : 6$, $BC = 22$ cm;

2) $AP : PB = 4 : 3$, $BC = 2{,}8$ dm!

488. Egy pont $x : y$ arányban osztja a háromszög oldalát. Határozzátok meg a keletkezett szakaszok mindegyikének arányát az oldal hosszához, ha:
1) $x = 1, y = 2$; 2) $x = 2, y = 3$; 3) $x = 4, y = 5$!

489. Az ABC háromszögben a BC oldalt három pont négy egyenlő részre osztja. Az osztópontokon keresztül az AC oldallal párhuzamos egyenesek vannak húzva. Határozzátok meg az egyenesekhez tartozó szakaszok hosszát, melyek végpontjai a háromszög oldalain vannak, ha:
1) $AC = 1{,}6$ dm; 2) $AC = 124$ mm!

490. Hogyan húzzunk az adott háromszög egyik oldalával párhuzamos egyenest úgy, hogy a kapott hasonló háromszögek kerületeinek aránya:
1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$ legyen?

491. Az $ABCD$ paralelogramma B csúcsán át egyenes van húzva, mely az AD oldal meghosszabbítását M pontban, a CD oldalt N pontban metszi. Határozzátok meg a DM szakasz hosszát, ha:
1) $AD = 5$, $BN : MN = 3 : 2$; 2) $AD = 3$, $BN : MN = 0{,}2 : 0{,}3$!

492. Szerkesszetek egymást kívülről érintő két kört, ha sugaraik aránya:
1) 2 : 3; 2) 3 : 4!

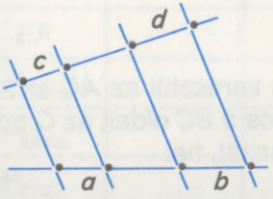
493.* Az AB szakaszon O és H pontok vannak kijelölve ($AO < AH$). Az AB szakasz így kapott részeinek hossza az A ponttól számítva a, b és c. Határozzátok meg, hogy az AB szakasz milyen részeit képezik az AO, OH, HB, AH és OB szakaszok!

494.* Az AB szakasz hossza a. Az M és T pontok az AB egyenesen úgy helyezkednek el, hogy az M pont az AB szakaszon fekszik, és $AM : MB = 2 : 3$, a T pont nem tartozik az AB szakaszhoz, és $AT : TB = 4 : 3$.
Határozzátok meg az M és T pontok közötti távolságot, ha:
1) $a = 6$ cm; 2) $a = 10$ cm!

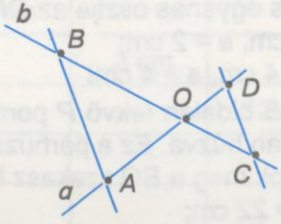
495.* A 267. ábra adatai alapján bizonyítsátok be:
1) $a : c = b : d$; 2) $a : c = (a + b) : (c + d)$; 3) $c : a = (b - a) : (d - c)$!

496.* A 268. ábrán $AB \parallel CD$.
1) Az arányos szakaszok tételét alkalmazva bizonyítsátok be, hogy $AO : OD = OB : OC$!
2) Határozzátok meg AO-t és OD-t, ha $AD = 10$ cm, $OB = 5$ cm, $OC = 3$ cm!

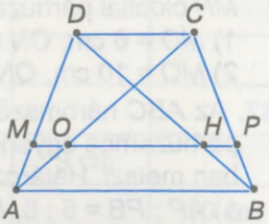
497.* Az MN szakasz párhuzamos az ABC háromszög BC oldalával, végpontjai az AB és AC oldalakon vannak. Bizonyítsátok be, hogy az AA_1 súlyvonal felezi az MN szakaszt!



267. ábra



268. ábra



269. ábra

498.* Az $ABCD$ trapéz alapjaival párhuzamos egyenes (269. ábra) a trapéz szárait M és P, átlóit O és H pontokban metszi.

1) Egyenlők-e az MO és HP szakaszok?

2) Valamennyi trapézra érvényes-e az $\frac{MO}{DC}+\frac{OP}{AB}=1$ összefüggés?

499.* A trapéz alapjai a és b. Az egyik szár három egyenlő részre van osztva, az osztópontokon keresztül az alapokkal párhuzamos egyeneseket rajzoltak. Határozzátok meg a szakaszok hosszát, melyek végpontjai a szárakon vannak, ha:

1) $a = 7$ cm, $b = 10$ cm; 2) $a = 10$ cm, $b = 14$ cm!

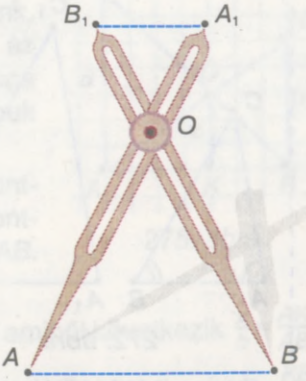
A trapézban az alapokkal párhuzamos egyenesek vannak rajzolva. Húzzatok a csúcson át az egyik szárral párhuzamos egyenest. A trapéz paralelogrammára és háromszögre bomlik. Feladat: a párhuzamos egyeneseknek a háromszögön belülre kerülő szakaszai hosszának meghatározása.

500.* A trapéz alapjai a és b ($a > b$). Az egyik száron n pont van megjelölve, melyek egyenlő részekre osztják a szárat. A pontokon keresztül az alapokkal párhuzamos egyeneseket húztak. Állítsatok össze képletet a szakaszok hosszának kiszámítására, melyek végpontjai a trapéz szárain fekszenek, ha:

1) $n = 2$; 2) $n = 3$!

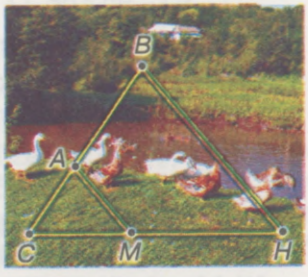
ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

501. A szakaszok meghatározott arányú kisebbítésére vagy nagyobbítására aránykörzőt használnak (270. ábra). Magyarázzátok meg, min alapszik az aránykörző használata!



270. ábra

502. A Kert utca és a Virág utca a Botanikus kertnél veszi kezdetét. Az utcákat az egymással párhuzamos Rózsa utca és Cseresznye utca keresztezi. A Kert utca és Virág utca között a távolság a Rózsa utca mentén 750 m, a Cseresznye utca mentén 1 km 250 m. A villamos a Kert utcán közlekedve a Botanikus kerttől a Rózsa utcáig 15 perc alatt jut el. Mennyi idő alatt éri el a villamos a Cseresznye utcát, ha végig egyenletes sebességgel halad?



271. ábra

503. Határozzátok meg a folyó két partján levő (A-val és B-vel jelölt) telkek közötti távolságot (271. ábra), ha $AM \parallel BH$ és $CA = 4$ m, $CM = 5$ m, $MH = 35$ m!

504. A torony árnyéka 24 m, az 1,2 m magas karó árnyéka ugyanazon időpontban 80 cm. Milyen magas a torony?



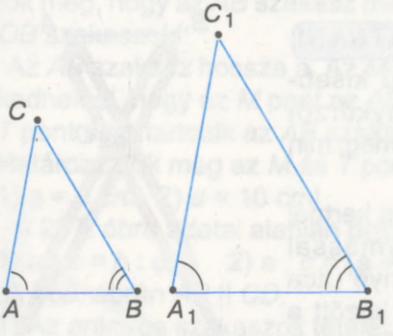
12.§. A HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGÁNAK ELSŐ ISMERTETŐJELE

Két háromszög hasonlóságának megállapításához a meghatározás alapján meg kell győződni arról, hogy megfelelő szögeik egyenlők, és megfelelő oldalaik arányosak. A gyakorlatban ez kényelmetlen, ezért alkalmazzuk a *háromszögek hasonlóságának ismertetőjeleit.*

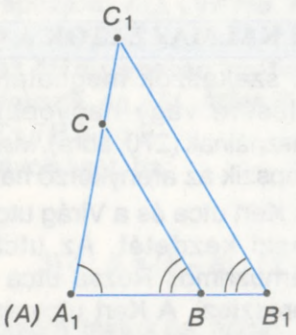
Tantétel (a háromszögek hasonlósága két szög alapján).
Ha egy háromszög két szöge megfelelően egyenlő egy másik háromszög két szögével, akkor ezek a háromszögek hasonlók.

Adva: $ABC\Delta$ és $A_1B_1C_1\Delta$ (272. ábra), $A\angle = A_1\angle$, $B\angle = B_1\angle$.

Bebizonyítani: $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$.



272. ábra



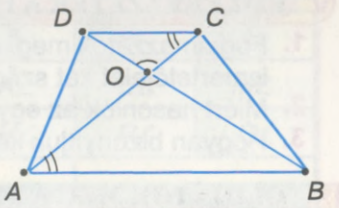
273. ábra

Bizonyítás. Ráhelyezzük az $ABC\Delta$-et az $A_1B_1C_1\Delta$-re úgy, hogy az A szög egybeessen az A_1 szöggel (273. ábra). Ezt megtehetjük, mivel $A\angle = A_1\angle$. Akkor az AB és AC oldalak megfelelően az A_1B_1 és A_1C_1 félegyeneseken lesznek. A BC és B_1C_1 egyenesek az A_1B_1 metsző egyenessel egyállású egyenlő szögeket alkotnak: $A_1BC\angle = A_1B_1C_1\angle$. Tehát az egyenesek párhuzamosságának ismertetőjele alapján $BC \parallel B_1C_1$. Thalész tételének általánosítása értelmében a B_1C_1 oldallal párhuzamos BC egyenes az $A_1B_1C_1$ háromszögből hasonló háromszöget metsz ki. Ezért $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$.

Következmény. **Az egyenlő oldalú háromszögek hasonlók.**

Valóban, az egyenlő oldalú háromszögek szögei 60°-osak. Ezért a háromszögek hasonlók két szögük alapján.

Feladat. Az $ABCD$ trapéz AC és BD átlói az O pontban metszik egymást (274. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $AOB\Delta \sim COD\Delta$.



274. ábra

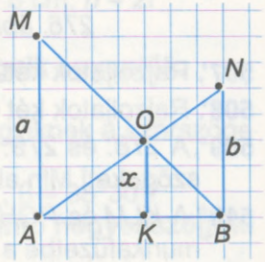
Megoldás. Vizsgáljuk meg az AOB és COD háromszögeket. A háromszögekben $AOB\angle = COD\angle$ mint csúcsszögek, $OAB\angle = OCD\angle$ mint az AB és CD párhuzamosok AC metsző egyenessel alkotott váltószögek. Tehát $AOB\Delta \sim COD\Delta$ két szög alapján.

Két háromszög hasonlóságának bizonyításakor:
1) jelöljük azokat a rajzon;
2) bizonyítsuk be két megfelelő szögpár egyenlőségét;
3) vonjuk le a következtetést: a háromszögek hasonlók két szögük alapján.

TUDJATOK TÖBBET!

1. A hasonló háromszögek tulajdonságain alapszik a *nomogramok* készítésének elve. A nomogram speciális műszaki rajz, melynek segítségével számolás nélkül megkaphatjuk egy meghatározott egyenlet megoldásait. Megvizsgálunk egy feladatot.

Feladat. Egy AB szakasz végpontjaiba egyazon oldalról $AM = a$ és $BN = b$ merőlegeseket állítunk. Meghúzzuk az MB és NA szakaszokat, melyek az O pontban metszik egymást. Az O pont távolsága az AB szakasztól x. Keressük meg az x értékének függését az a és a b értékétől!



275. ábra

Megoldás. Legyen a K pont (275. ábra) az O pontból az AB egyenesre bocsátott merőleges talppontja. A feladat feltételei szerint $AM \perp AB$, $BN \perp AB$. Kapjuk:

1) az ABN derékszögű háromszögben $OK \parallel BN$, amiből következik $\frac{x}{b} = \frac{AK}{AB}$;

2) a BAM derékszögű háromszögben $OK \parallel AM$, amiből következik $\frac{x}{a} = \frac{KB}{AB}$.

Összeadva a kapott egyenlőségeket kapjuk: $\frac{x}{b} + \frac{x}{a} = \frac{AK + KB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$,

vagyis $\frac{x}{b} + \frac{x}{a} = 1$. Innen $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{x}$.

Kaptunk egy egyenletet, amely kifejezi a keresett összefüggést.
Az egyenlet megközelítő megoldására egy kockás füzetlapon vagy milliméterpapíron megszerkesztjük (amint a 275. ábrán látható) a megadott hosszúságú a és b szakaszt. Lemérve az x hosszúságát, megkapjuk az egyenlet keresett gyökét. Ilyen nomogramok alkalmasak feladatok megoldására fizikából, különösen az *Optika* c. fejezet tanulmányozása során.

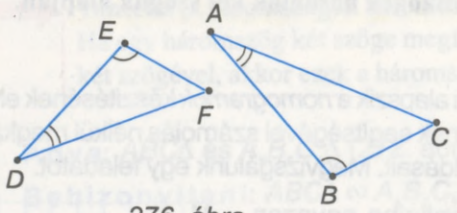
EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a háromszögek hasonlóságának ismertetőjelét két szögük alapján!
2. Miért hasonlók az egyenlő oldalú háromszögek?
3. Hogyan bizonyítjuk két háromszög hasonlóságát?

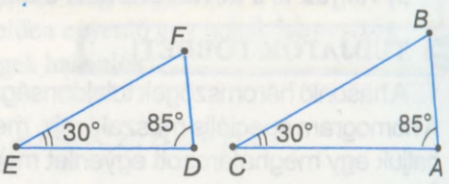
OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

505'. A 276. ábra adatai alapján válasszátok ki a háromszögek megfelelően egyenlő szögpárjait! Hasonlók-e az adott háromszögek? Milyen ismertetőjel alapján? Írjátok le a háromszögek hasonlóságát!

506'. A 277. ábrán a *DFE* és *ABC* háromszögek egyes adatai láthatók. Hasonlók-e a háromszögek?



276. ábra



277. ábra

507'. Rajzoljatok két egyenlő szárú, egymáshoz nem hasonló háromszöget!

508'. Rajzoljatok két derékszögű, egymáshoz nem hasonló háromszöget!

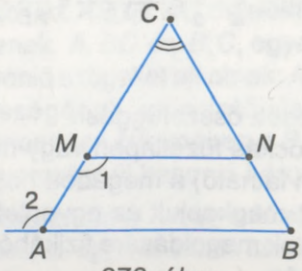
509°. A 278. és 279. ábrákon keressétek meg az egymáshoz hasonló háromszögeket! Min alapszik hasonlóságuk?

510°. A *KLM* és *POH* háromszögekben vannak α és β szögek. Rajzoljátok át a munkafüzetbe a 18. táblázatot, és töltsétek ki az első oszlopban bemutatott minta alapján!

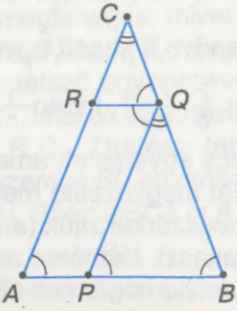
511°. Az *ABC*Δ két szöge és az *MHT*Δ két szöge megfelelően egyenlő:

1) 23° és 77°, valamint 77° és 23°;
2) 105° és 15°, valamint 15° és 105°;
3) 30° és 90°, valamint 30° és 60°.

Hasonlók-e a háromszögek?



278. ábra



279. ábra

18. táblázat

α	β	α	β	α	β	α	β
$K\angle$	$L\angle$	$L\angle$	$K\angle$	$M\angle$	$K\angle$	$L\angle$	$M\angle$
$P\angle$	$O\angle$	$H\angle$	$O\angle$	$P\angle$	$H\angle$	$P\angle$	$O\angle$
$KLM\triangle \sim POH\triangle$ két szög alapján							

512°. Az egyik háromszög két szögének aránya egyenlő egy másik háromszög két szögének arányával. Miért nem állítható, hogy ezek a háromszögek hasonlók?

513°. Az $ABC\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle$-höz. Számítsátok ki a háromszögek oldalait és szögeit, ha:

1) $A\angle = B\angle = 60°$, $AB = 2$ cm, $A_1C_1 = 6$ cm;
2) $B\angle = C\angle = 60°$, $A_1B_1 = 2$ cm, $AC = 4$ cm;
3) $B\angle = C\angle = 60°$, $BC = 9$ cm, $A_1B_1 = 3$ cm!

514°. Az ABC és KLM háromszögekben: $A\angle = K\angle$, $B\angle = L\angle$, $AB = c$, $BC = c + 2$, $AC = c - 2$, $KL = nc$. Határozzátok meg a háromszögek oldalait, ha:

1) $c = 5$ cm, $n = 3$; 2) $c = 6$ cm, $n = \frac{3}{4}$; 3) $c = 8$ cm, $n = 2$!

515°. Az egyenlő szárú háromszögek hasonlók, ha:
1) az alapon fekvő szögeik egyenlők; 2) szárszögeik egyenlők.
Bizonyítsátok be!

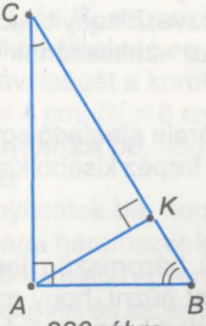
516°. Hasonlók-e az egyenlő szárú háromszögek, ha az egyiknek a szárszöge α, a másikban az alapon fekvő szög β, ha:

1) $\alpha = 52°$, $\beta = 64°$; 2) $\alpha = 43°$, $\beta = 68°30'$; 3) $\alpha = 105°$, $\beta = 38°30'$?

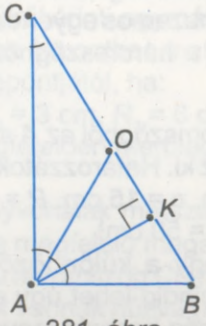
517°. Két derékszögű háromszög hasonló, ha van egyenlő hegyesszögük.
Bizonyítsátok be!

518°. Bizonyítsátok be, hogy az alábbi derékszögű háromszögek hasonlók!

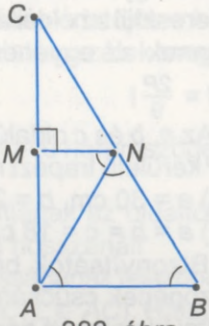
1) $ABC\triangle$ és $KBA\triangle$ (280. ábra);
2) $OKA\triangle$ és $BAC\triangle$ (281. ábra);
3) $AMN\triangle$ és $CAB\triangle$ (282. ábra).



280. ábra



281. ábra



282. ábra

519°. Hasonlók-e azok a derékszögű háromszögek, melyek egyik hegyesszöge α, a másik hegyesszöge β, ha:
1) $\alpha = 42°$, $\beta = 48°$; 2) $\alpha = 23°$, $\beta = 77°$; 3) $\alpha = 35°30'$, $\beta = 54°30'$?

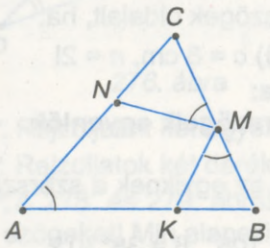
520°. Az egyenlő szárú derékszögű háromszögek hasonlók. Bizonyítsátok be!

521°. A trapéz alapjai *a* és *b*. Határozzátok meg, milyen arányban osztják egymást az átlók!

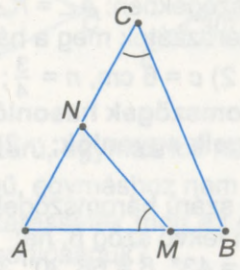
522°. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz BC és AD alapjai a és b. Az AC és BD átlók hossza c, metszéspontjuk O. Határozzátok meg a BCO és ADO háromszögek kerületét, ha:
1) $a = 32$ mm, $b = 52$ mm, $c = 48$ mm; 2) $a = 0{,}5$ dm, $b = 0{,}3$ dm, $c = 0{,}8$ dm;
3) $a = 3$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm!

523°. Az $ABCD$ trapéz AD és BC szárainak meghosszabbításai az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy $\frac{AD}{AO} = \frac{BC}{BO} = \frac{AB}{DC}$!

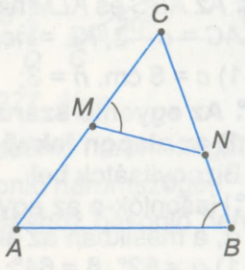
524. A 283–285. ábrák adatai alapján bizonyítsátok be az ábrázolt háromszögek hasonlóságát!



283. ábra



284. ábra



285. ábra

525. Bizonyítsátok be, hogy a háromszögek hasonlók, ha megfelelő oldalaik párhuzamosak!

526. Az ABC háromszög AE és CD magasságai a H pontban metszik egymást. Határozzátok meg a magasságokat, ha összegük 18 cm, $AH = 8$ cm, $CH = 4$ cm!

527. Az egyenlő oldalú háromszög kerülete P. A súlyvonalak metszéspontján keresztül az oldallal párhuzamos egyenes van húzva. Bizonyítsátok be, hogy ennek az egyenesnek a háromszöghöz tartozó szakaszának d hossza: $d = \frac{2P}{9}$!

528. Az a, b és c oldalú háromszögből az A szög szárain áthaladó egyenes egy P kerületű trapézt metsz ki. Határozzátok meg a trapéz kisebbik alapját, ha:
1) $a = 30$ cm, $b = 20$ cm, $c = 15$ cm, $P = 63$ cm;
2) $a = b = c = 18$ cm, $P = 50$ cm!

529. Bizonyítsátok be, hogy a különböző oldalú háromszög legnagyobb szögének csúcsán át mindig lehet úgy egyenest húzni, hogy az egyenes által kimetszett háromszög hasonló legyen az adott háromszöghöz!

530. Az ABC háromszög oldalán fekvő M ponton áthaladó egyenes a háromszögből hasonló háromszöget metsz ki. Hány megoldása van a feladatnak? Vizsgáljátok meg az eseteket, amikor az $ABC\Delta$:
1) különböző oldalú; 2) egyenlő szárú; 3) egyenlő oldalú!

531. Az a alapú és b szárú egyenlő szárú háromszögbe kör van írva. Határozzátok meg a szárakon fekvő érintési pontok közötti távolságot, ha:
1) $a = 6$ cm, $b = 10$ cm; 2) $a = 10$ cm, $b = 13$ cm!

532. Bizonyítsátok be, hogy az a alapú és b szárú egyenlő szárú háromszögbe írt kör szárakkal való érintési pontjai közötti d távolság kiszámítható a $d = \frac{a(2b - a)}{2b}$ képlettel!

533. Az a alapú és b szárú egyenlő szárú háromszögbe O középpontú kör van írva. Határozzátok meg, milyen arányban osztja (a csúcstól számítva) a kör középpontja az alapra bocsátott magasságot, ha:
1) $a = 12$ cm, $b = 10$ cm; 2) $a = 10$ cm, $b = 13$ cm!

534. **Bizonyítsátok be, hogy a hasonló háromszögekben a megfelelő magasságok úgy aránylanak, mint az oldalak, melyekre a magasságokat bocsátották!**

535. Két hasonló háromszögben vannak egymással egyenlő magasságok. Miért nem állíthatjuk, hogy ezek a háromszögek egybevágók?

536. **Bizonyítsátok be, hogy a hasonló háromszögekben a megfelelő szögfelezők úgy aránylanak egymáshoz, mint azok az oldalak, melyeket a szögfelezők metszenek!**

537. Az $A_1B_1C_1$ és az ABC háromszögek hasonlók ($k = 1{,}5$). Számítsátok ki a C_1 és C szögek szögfelezőjének hosszát, ha különbségük 4 cm!

538. Az $ABCD$ trapéz AC és BD átlói az O pontban metszik egymást. Határozzátok meg a trapéz alapjait, ha középvonala 24 cm, és ismeretes, hogy:
1) $CO : AO = 1 : 3$; 2) $BO : DO = 3 : 5$!

539. Az $ABCD$ négyszögben, melynek B és D szöge derékszög, AC átló van húzva. Az átló tetszőleges M pontjából ML és MN merőlegeseket bocsátottak megfelelően a BC és AD egyenesekre. Bizonyítsátok be, hogy $\frac{ML}{AB} + \frac{MN}{CD} = 1$.

540. Két R_1 és R_2 sugarú kör kívülről érinti egymást. Közös érintőjük a középpontjukon áthaladó egyenest az M pontban metszi. Határozzátok meg az M pont távolságát a körök középpontjától, ha:
1) $R_1 = 4$ cm, $R_2 = 6$ cm; 2) $R_1 = 3$ cm, $R_2 = 6$ cm!

541.* Bizonyítsátok be, hogy a megfelelően merőleges oldalú háromszögek hasonlók!

542.* Bizonyítsátok be, hogy a súlyvonalak metszéspontjának az oldaltól mért távolsága háromszor kisebb a megfelelő magasság hosszánál!

543.* Az $AB = a$ alapú egyenlő szárú háromszög CD magasságának felezőpontján keresztül AK és BL egyenesek vannak húzva ($K \in BC$, $L \in AC$). Határozzátok meg a KL szakasz hosszát, ha: 1) $a = 3$ cm; 2) $a = 4$ cm; 3) $a = 5$ cm!

544. **Bizonyítsátok be, hogy a háromszög magasságai fordítottan arányosak az oldalakkal, melyekre a magasságokat állították!**

545. Határozzátok meg két, k hasonlósági együtthatójú hasonló háromszög megfelelő magasságát, ha:

1) a magasságok összege 36, $k = 2$;

2) a magasságok különbsége 10, $k = \frac{2}{3}$!

546. Az R sugarú körbe $BC = a$, $AB = c$ oldalú ABC háromszög van írva. Bizonyítsátok be, hogy a harmadik oldalra húzott h_b magasság kiszámítható a $h_b = \frac{ac}{2R}$ képlettel!

547. Az O középpontú, R sugarú körvonalon, melyben két egymásra merőleges AB és CD átmérő van rajzolva, felvettek egy K pontot. Az AK húr a CD átmérőt M pontban metszi, a CD meghosszabbítását a BK egyenes az N pontban. Bizonyítsátok be, hogy $OM \cdot ON = R^2$!

548. Az $AC = b$ és $BC = a$ oldalú ABC háromszögbe a $CKLM$ rombusz úgy van beírva, hogy $K \in AC$, $L \in AB$, $M \in BC$. Bizonyítsátok be, hogy a rombusz x oldala kiszámítható az $x = \frac{ab}{a+b}$ képlettel!

549. A B tompaszögű ABC háromszögben meghúzták a BD és CM magasságokat. Bizonyítsátok be, hogy az ABC és ADM háromszögek hasonlók!

550. Az $ABCD$ trapéz alapjai a és b $(a > b)$, az $ADC\angle$ tompaszög. Határozzátok meg a trapézt két hasonló háromszögre bontó AC átló hosszának négyzetét!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

551. A háromszintes épület magassága a fényképen 8 mm. Ismerve azt, hogy az épület valóságos magassága 13 m, a fényképezőgép kamerájának mélysége pedig 12 cm, számítsátok ki, milyen távolságról készült a fénykép!

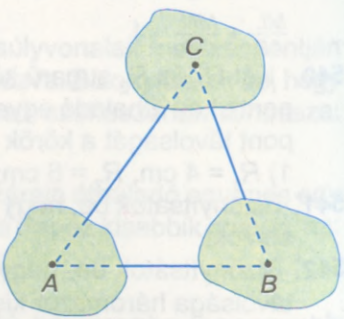
552. Az ABC háromszög mindegyik csúcsa megközelíthetetlen (286. ábra). Hogyan határozhatók meg a háromszög oldalai?

553. A 320 m hosszú útszakasz egyenletes emelkedésű. Az útszakasz végén 186,5 m és 194,9 m jelzések olvashatók. Milyen jelzésnek kellene állni az emelkedő kezdetétől számított 120. méternél?

554. A faluból három út indul ki:

1) délnyugati irányba; 2) déli irányba;

3) dél-délkeleti irányba. Akármelyik úton menjen a faluból a gyalogos, távolságának aránya a másik két úthoz állandó marad. Magyarázzátok meg, miért van ez így!



286. ábra



13. §. A HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGÁNAK MÁSODIK ÉS HARMADIK ISMERTETŐJELE

Már tanultátok, hogy a háromszögek egybevágósága megállapítható két oldal és a közbezárt szög, vagy a három oldal alapján. Hasonló ismertetőjelei vannak a háromszögek hasonlóságának is. Ebben az esetben viszont nem az egyenlőséget kell kimutatni, hanem két háromszög megfelelő oldalainak arányosságát.

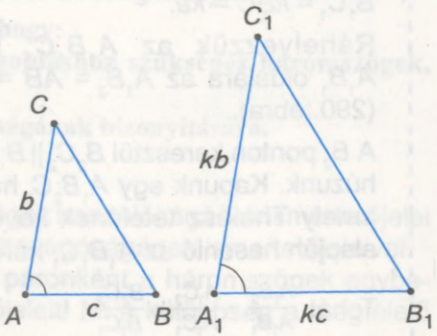
Tantétel (a háromszögek hasonlóságának ismertetőjele két oldal és a közbezárt szög alapján).
Ha egy háromszög két oldala arányos egy másik háromszög két oldalával, az általuk bezárt szögek pedig egyenlők, akkor az ilyen háromszögek hasonlók.

Adva: $ABC\angle$ és $A_1B_1C_1\angle$ (287. ábra).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \quad A\angle = A_1\angle.$$

Bebizonyítani: $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$.

Bizonyítás. Legyen $A_1B_1 = kAB = kc$, $A_1C_1 = kAC = kb$.
Ráhelyezzük az $A_1B_1C_1$ háromszög A_1B_1 oldalára az $A_1B_2 = AB = c$ szakaszt (288. ábra). A B_2 ponton keresztül meghúzzuk a $B_2C_2 \parallel B_1C_1$ egyenest.
Kapunk egy $A_1B_2C_2$ háromszöget, mely Thalész tételének következménye alapján hasonló az $A_1B_1C_1$ háromszöghöz. Tehát $\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1}$. Innen $\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1}$.

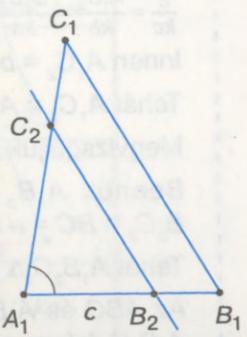


287. ábra

Ebbe az aránypárba behelyettesítjük az oldalak ismert hosszúságát és egyszerűsítjük a kapott törteket.

Kapjuk: $\frac{c}{kc} = \frac{A_1C_2}{kb}$, $1 = \frac{A_1C_2}{b}$. Innen $A_1C_2 = b$.

Az ABC és $A_1B_2C_2$ háromszögek egyenlőségéből, valamint az $A_1B_2C_2$ és $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóságából következik, hogy $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$.



288. ábra

Következmény. **A megfelelően arányos befogójú derékszögű háromszögek hasonlók.**

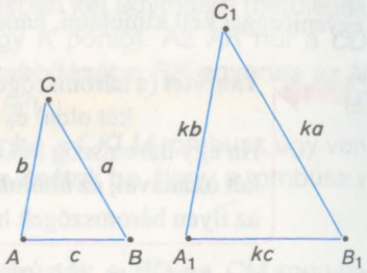
Valóban, a derékszögű háromszögek befogói között derékszög van, a derékszögek pedig egyenlők. Ezért a megfelelően arányos befogójú derékszögű háromszögek hasonlók két oldaluk és a közbezárt szög alapján.

Tantétel (a háromszögek hasonlóságának ismertetőjele három oldaluk alapján).
Ha egy háromszög oldalai arányosak egy másik háromszög oldalaival, akkor a háromszögek hasonlók.

Adva: $ABC\Delta$ és $A_1B_1C_1\Delta$ (289. ábra).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Bebizonyítani: $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$.



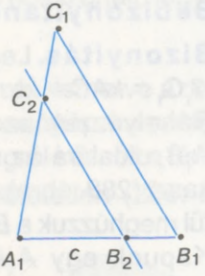
289. ábra

Bizonyítás.

Legyen $A_1B_1 = kAB = kc$, $A_1C_1 = kAC = kb$, $B_1C_1 = kBC = ka$.

Ráhelyezzük az $A_1B_1C_1$ háromszög A_1B_1 oldalára az $A_1B_2 = AB = c$ szakaszt (290. ábra).

A B_2 ponton keresztül $B_2C_2 \parallel B_1C_1$ egyenest húzunk. Kapunk egy $A_1B_2C_2$ háromszöget, amely Thalész tételének következménye alapján hasonló az $A_1B_1C_1$ háromszöghöz.



290. ábra

Tehát $\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1}$.

A továbbiakban kapjuk:

$\frac{c}{kc} = \frac{A_1C_2}{kb} = \frac{B_2C_2}{ka}$, vagy $1 = \frac{A_1C_2}{b} = \frac{B_2C_2}{a}$.

Innen $A_1C_2 = b$, $B_2C_2 = a$.

Tehát $A_1C_2 = AC$ és $B_2C_2 = BC$.

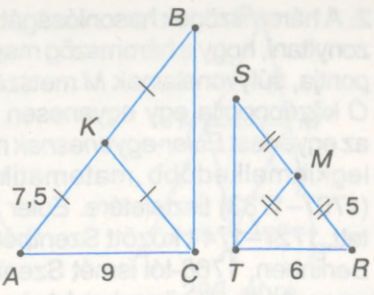
Megvizsgáljuk az $A_1B_2C_2$ és ABC háromszögeket.

Bennük $A_1B_2 = AB = c$ a szerkesztés szerint, $A_1C_1 = AC = b$ és $B_2C_2 = BC = a$ a bizonyítás alapján.

Tehát $A_1B_2C_2\Delta = ABC\Delta$ a három oldal alapján.

Az ABC és $A_1B_2C_2$ háromszögek egyenlőségéből, valamint az $A_1B_2C_2$ és $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóságából következik, hogy $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$.

Feladat. Az ABC és RST háromszögekben (291. ábra) a legnagyobb oldalhoz húzott súlyvonal ennek az oldalnak a felével egyenlő. Hasonlók-e a háromszögek, ha $AC = 9$, $AK = 7{,}5$, $TR = 6$, $MR = 5$?



291. ábra

Megoldás. A CK és TM súlyvonalak az adott ABC és RST háromszögekből megfelelően ACK és RTM háromszögeket metszenek ki. Mindkét háromszögben ismert három oldal: $AC = 9$, $AK = KC = 7{,}5$, $RT = 6$, $RM = MT = 5$.

Tisztázzuk, arányosak-e az adott háromszögek megfelelő oldalai:

$\frac{AC}{RT} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, $\frac{AK}{RM} = \frac{KC}{MT} = \frac{7{,}5}{5} = \frac{3}{2}$.

Tehát $ACK\Delta \sim RTM\Delta$ három oldal alapján. A háromszögek hasonlóságából következik, hogy $A\angle = R\angle$.

Megvizsgáljuk az ABC és RST háromszögeket. Bennük $A\angle = R\angle$,

$\frac{AC}{RT} = \frac{3}{2}$, $\frac{AB}{RS} = \frac{2AK}{2RM} = \frac{AK}{RM} = \frac{3}{2}$.

Tehát $ABC\Delta \sim RST\Delta$ két oldal és a közbezárt szög alapján.

Feladatok megoldásakor figyeljetek arra, hogy:

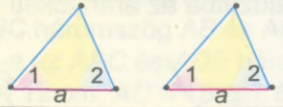
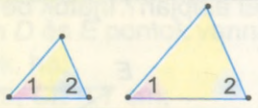
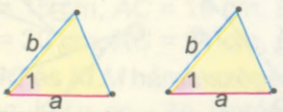
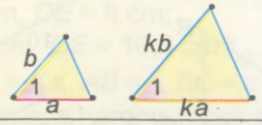
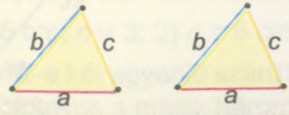
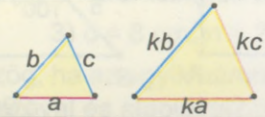
1) ha a rajzon nincsenek feltüntetve a megoldáshoz szükséges háromszögek, rajzoljátok meg azokat;

2) néha szükség van több háromszög hasonlóságának bizonyítására.

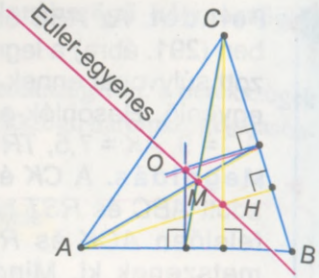
TUDJATOK TÖBBET!

1. Biztosan megfigyeltétek, hogy a háromszögek hasonlóságának ismertetőjelei sok egyezést mutatnak a háromszögek egybevágóságának ismertetőjeleivel. A 19. táblázat alapján fogalmazzátok meg páronként a háromszögek egybevágóságának és hasonlóságának ismertetőjeleit! Mi a különbség a megfelelő ismertetőjelek között?

19. táblázat

A háromszögek egybevágók, ha:	A háromszögek hasonlók, ha:
	
	
	

2. A háromszögek hasonlóságát felhasználva be lehet bizonyítani, hogy a háromszög magasságainak H metszéspontja, súlyvonalainak M metszéspontja és a körülírt kör O középpontja egy egyenesen fekszik (292. ábra). Ezt az egyenest *Euler-egyenesnek* nevezzük a XVIII. század legkiemelkedőbb matematikusa, Leonhard Euler (1707–1783) tiszteletére. Euler Baselben (Svájc) született, 1727–1741 között Szentpéterváron dolgozott, majd Berlinben, 1766-tól ismét Szentpéterváron. Munkássága során kiváló sikereket ért el a matematika valamennyi részterületén, a mechanikában, fizikában, csillagászatban. A nevét viselő egyenes tételét Euler 1765-ben fogalmazta meg, bizonyította be és publikálta.



292. ábra


Leonhard Euler

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a háromszögek hasonlóságának ismertetőjelét két oldal és a közbezárt szög alapján!
2. Miért hasonlók az arányos befogójú derékszögű háromszögek?
3. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a háromszögek hasonlóságának ismertetőjelét három oldaluk alapján!

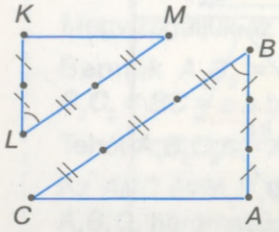
OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

555'. A 293. ábra alapján válasszátok ki a háromszögek megfelelően egyenlő szögeit és a megfelelően arányos oldalakat! Hasonlók-e ezek a háromszögek? A megoldást írjátok le!

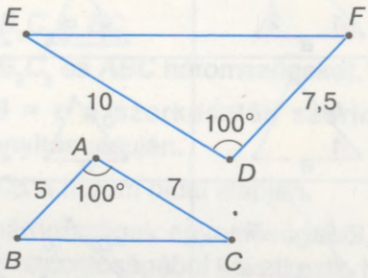
556'. A 294. ábrán fel vannak tüntetve a DEF és ABC háromszögek adatai. Hasonlók-e az adott háromszögek?

557'. A háromszög két oldala 5 cm és 8 cm. Az általuk bezárt szög 50°. Mondjatok példákat az adott háromszöghöz hasonló háromszögekre!

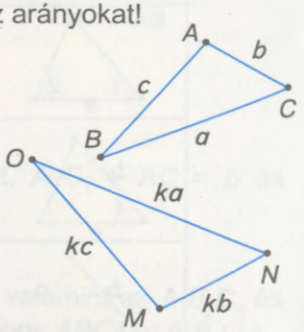
558'. A 295. ábrán feltüntetett adatok alapján nevezzétek meg a háromszögek megfelelően arányos oldalait! Hasonlók-e az adott háromszögek? Milyen ismertetőjel alapján? Írjátok be a munkafüzetbe az arányokat!



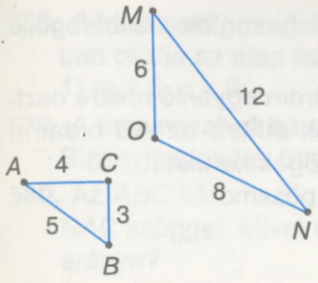
293. ábra



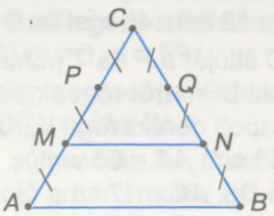
294. ábra



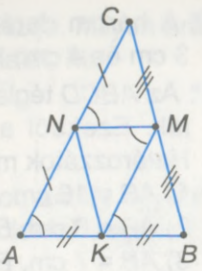
295. ábra



296. ábra



297. ábra



298. ábra

559'. A 296. ábrán az *MON* és *ABC* háromszögek adatai láthatók. Hasonlók-e az adott háromszögek?

560'. Egy háromszög oldalai 5 cm, 6 cm és 9 cm. Milyen oldalai lehetnek a hozzá hasonló háromszögnek?

561°. Keressétek meg a 297. és 298. ábrákon a hasonló háromszögeket! Mutassatok rá, miért áll fenn a hasonlóság!

562°. A *KLM* és *POH* háromszögekben az egyik szög α-val egyenlő. Milyen két oldal arányossága esetén lesznek hasonlók a háromszögek? Rajzoljátok be a munkafüzetbe a 20. táblázatot, és töltsétek ki az első oszlopban megadott minta szerint!

20. táblázat

α	Két oldal		α	Két oldal		α	Két oldal	
$K\angle$	$a = KL$	$b = KM$	$L\angle$	$a =$	$b =$	$M\angle$	$a =$	$b =$
$P\angle$	$ka = PO$	$kb = PH$	$H\angle$	$ka =$	$kb =$	$P\angle$	$ka =$	$kb =$
$KLM\triangle \sim POH\triangle$ két oldal és a közbezárt szög alapján								

563°. Az egyik háromszögben két oldal 5 cm és 8 cm, a másikban 6 cm és 12 cm, a harmadikban 10 cm és 16 cm. Az adott oldalak által alkotott szögek egyenlők. A háromszögek közül melyek hasonlók? Indokoljátok a feleletet!

564°. Az *ABC* háromszög *AB* és *AC* oldalán *D* és *E* pontok vannak felvéve. Hasonlók-e az *ABC* és *ADE* háromszögek, ha:

1) $AB = 12$ cm, $AC = 15$ cm, $BD = 2$ cm, $CE = 7$ cm;
2) $AB = 15$ cm, $AC = 18$ cm, $BD = 3$ cm, $CE = 8$ cm;
3) $AB = 20$ cm, $AC = 21$ cm, $BD = 10$ cm, $CE = 10{,}5$ cm?

565°. Az *ABC* és *KLM* háromszögekben $A\angle = K\angle$, $AB = c$, $BC = c + 2$, $AC = c - 2$, $KL = nc$, $KN = nc - 2n$. Határozzátok meg a háromszögek oldalait, ha:

1) $c = 5$ cm, $n = 3$; 2) $c = 6$ cm, $n = \frac{3}{4}$; 3) $c = 8$ cm, $n = 2$!

566°. Hasonló-e két egyenlő szárú háromszög, ha az egyik háromszög szára és alapja arányos a másik háromszög szárával és alapjával?

567°. A három derékszögű háromszög közül melyek hasonlók, ha befogóik: 3 cm és 4 cm; 5 cm és 12 cm; 45 mm és 6 cm?

568°. Az $ABCD$ téglalap AC átlóját a P és T pontok három egyenlő részre osztják. Ezekből a pontokból merőlegesek vannak állítva az AB oldalra. Határozzátok meg a kapott derékszögű háromszögek kerületét, ha:
1) $AB = 16$ cm, $BC = 63$ cm, $AC = 65$ cm;
2) $AB = 8$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 17$ cm;
3) $AB = 7$ cm, $BC = 24$ cm, $AC = 25$ cm!

569°. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz AC és BD átlóinak hossza c, O metszéspontjuk $m : n$ arányban osztja az átlókat. $AD - BC = 4$ cm. Határozzátok meg a trapéz alapjait, valamint a BCO és ADO háromszögek kerületét, ha:
1) $c = 42$ mm, $m = 8$, $n = 13$; 2) $c = 0{,}8$ dm, $m = 5$, $n = 3$;
3) $c = 7$ cm, $m = 2$, $n = 5$!

570°. A következő három háromszög közül melyek hasonlók, ha oldalaik: 8 cm, 10 cm, 14 cm; 12 cm, 15 cm, 21 cm; 16 cm, 20 cm, 30 cm hosszúak?

571°. Egy háromszög oldalai a, b és c. A hozzá hasonló háromszög legkisebb oldala d. Határozzátok meg az oldalait, ha:
1) $a = 7$ cm, $b = 9$ cm, $c = 12$ cm, $d = 21$ cm;
2) $a = 17$ cm, $b = 8$ cm, $c = 15$ cm, $d = 56$ cm;
3) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 9$ cm, $d = 25$ cm!

572°. Az egyenlő szárú háromszög alapja b, szára a. A hozzá hasonló háromszögben az alap c.
Határozzátok meg ennek a háromszögnek a kerületét, ha:
1) $a = 18$ cm, $b = 12$ cm, $c = 6$ cm; 2) $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, $c = 12$ cm;
3) $a = 25$ cm, $b = 14$ cm, $c = 28$ cm!

573°. Két tompaszögű háromszög kerülete úgy aránylik egymáshoz, mint $m : n$. Az első háromszög legnagyobb oldala a. Határozzátok meg a másik háromszög legnagyobb oldalát, ha:
1) $a = 24$ mm, $m = 2$, $n = 3$; 2) $a = 1{,}5$ dm, $m = 5$, $n = 3$;
3) $a = 12$ cm, $m = 3$, $n = 4$!

574. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $A\angle = A_1\angle$; $AB \cdot A_1B_1 = AC \cdot A_1C_1$. Bizonyítsátok be, hogy $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$!

575. Bizonyítsátok be, hogy a hasonló háromszögek megfelelő súlyvonalainak aránya az általuk felezett oldalak arányával egyenlő!

576. Két hasonló háromszögnek van egyenlő súlyvonala. Miért nem állítható, hogy a két háromszög egybevágó?

577. Az A szög szárait egy egyenes a K és L pontokban metszi, egy másik egyenes megfelelően az M és N pontokban, és $KL : MN = \frac{1}{5} : 0{,}25$. $KM = 3$ cm. Az AK szakasz milyen hosszúsága esetén lesz a két adott egyenes párhuzamos egymással?

578. A háromszög magassága az alapot $m : n$ arányban osztja. Milyen arányban osztja az alap felező merőlegese a háromszög oldalát, ha:
1) $m = 5$, $n = 9$; 2) $m = 3$, $n = 5$?

579. A hegyesszögű háromszög magasságai BH és CM.
Bizonyítsátok be, hogy $ABC\Delta \sim AMH\Delta$!

580. Az ABC háromszög AA_1 súlyvonala AA_1C szöget alkot, amely egyenlő a BAC szöggel. Mivel egyenlő a háromszög BC és AC oldalai négyzetének aránya?

581. Az E pont az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának felezőpontja. Az AE szakasz a BD átlót a K pontban metszi. Határozzátok meg:
1) az AK és KE; 2) a BK és KD szakaszok arányát!

582. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának B pont utáni meghosszabbításán F pont van felvéve. A DF egyenes az AC átlót E pontban metszi.
Határozzátok meg a BF szakasz hosszát, ha $AB = 10$ cm, $AE : CE = 4{,}5 : 3$!

583. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz BM magassága az AC átlót $m:n$ arányban osztja. Milyen arányban osztja az AD oldalt, ha:
1) $m = 1$, $n = 2$; 2) $m = 1$, $n = 1$?

584. Hasonló-e két derékszögű háromszög, ha:
1) az átfogók aránya egyenlő a körülírt körök sugarainak arányával;
2) két befogó aránya egyenlő a körülírt körök sugarainak arányával;
3) az átfogók aránya egyenlő a beírt körök sugarainak arányával?

585.* **A megfelelően arányos befogójú és átfogójú derékszögű háromszögek hasonlók.** Bizonyítsátok be!

586.* Határozzátok meg azon pontok közötti távolságot, melyek a háromszög két oldalát $1 : m$ arányban osztják az a hosszúságú harmadik oldaltól számítva!

587.* A háromszögbe úgy van téglalap írva, hogy átlói párhuzamosak a háromszög két oldalával. Határozzátok meg, milyen arányban osztják a téglalap csúcsai a háromszög oldalait az alap csúcsaitól számítva!

588.* A rombusz tompaszögének csúcsából két magasság van húzva. A magasságok talppontjai közötti távolság a nagyobbik átló felével egyenlő. Határozzátok meg a rombusz szögeit!

589.* A trapéz a és b ($a > b$) alapjai felhasználásával határozzátok meg:
1) a trapéz szárait a kisebbik alaptól $1 : m$ arányban osztó pontok közötti távolságot;
2) az átlók metszéspontján átmenő, az alapokkal párhuzamos szakasz hosszát;
3) a szárak meghosszabbításainak metszéspontján az alapokkal párhuzamosan áthaladó szakasz hosszát, melynek végpontjai az átlók meghosszabbításain vannak.

590.* **Egy szakasz, melynek végpontjai a trapéz szárain fekszenek, a trapéz átlóinak metszéspontján az alapokkal párhuzamosan halad át. Bizonyítsátok be, hogy az átlók metszéspontja felezi ezt a szakaszt!**

591.* A trapéz alapjainak aránya $m:n$. Az egyik alap O felezőpontja össze van kötve szakaszokkal a másik alap végpontjaival. Ezek a szakaszok a trapéz átlóit M és N pontokban metszik. Határozzátok meg az M és N pontok közötti távolságot, ha:
1) az O pont a trapéz kisebbik alapján van, $m = 1$, $n = 4$;
2) az O pont a trapéz nagyobbik alapján van, $m = 2$, $n = 3$!

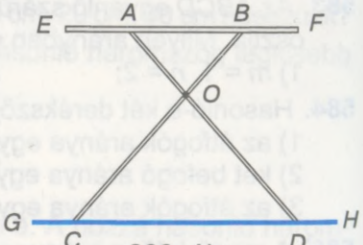
592.* Két körvonal az A és B pontokban metszi egymást. Az A pontba húzott érintők a köröket M és N pontokban metszik. Bizonyítsátok be, hogy az AM és AN húrok felezőpontjai, valamint az A és B pontok egy körvonalon fekszenek!

593.* Az ABC háromszög BH magassága az AM súlyvonalat az A csúcstól számítva 3 : 1 arányban osztja. Milyen arányban osztja a H pont az AC oldalt?

594.* Az ABC háromszög BM súlyvonala az AH magasságot a csúcstól számítva 3 : 1 arányban osztja. Milyen arányban osztja ez a magasság a BM súlyvonalat?

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

595.* A 299. ábrán egy kempingasztal keresztmetszete látható. Az AD és BC az asztal két lába. $AO = BO = 52$ cm. $OC = OD = 88$ cm, EF az asztal vízszintes felületének metszete, GH a padló vonala. Magyarázzátok meg, az asztal ilyen felépítése mellett az EF és GH miért párhuzamos!



299. ábra

596. Hogyan határozható meg két A és B pont közötti távolság, ha közöttük átjárhatatlan akadály van?

597. A nap egy meghatározott időpontjában a kétméteres pózna árnyéka 1,4 m, a fa árnyéka (a törzstől mérve) 9,3 m. Határozzátok meg a fa magasságát, ha tudjuk, hogy törzsének átmérője a talajszinten 8,3 m!

598. A fa magassága miért mérhető meg nappal az árnyék alapján, éjjel viszont a lámpafénytől származó árnyék alapján nem?

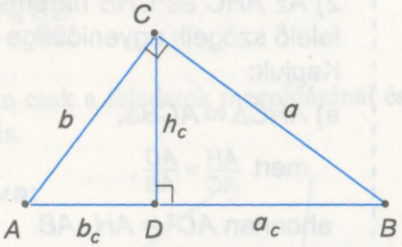
599.* Az AB szakasz három egyenlő részre való felosztásakor a következőképpen jártak el. Az AD félegyenesen, amelyik nem esik egybe az AB szakasszal, két egymással egyenlő AE és EK szakaszt mértek fel. Majd a KB félegyenesen úgy vettek fel egy T pontot, hogy $KB = BT$. A TE egyenes az AB szakaszt 2 :1 arányban osztotta. Tehát azt kapták, hogy a kisebbik szakasz az AB szakasz egyharmadával egyenlő. A nagyobbik szakaszt megfelezték. Magyarázzátok meg a szerkesztést!





14. §. A HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGÁNAK ALKALMAZÁSA

Húzzuk meg az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó CD magasságot (300. ábra). A magasság talppontja az átfogót AD és BD szakaszokra osztja, melyeket a *befogók átfogóra eső vetületeinek* nevezünk.



300. ábra

Ha a háromszög oldalait kisbetűk jelölik (300. ábra), akkor az a és b befogók vetületét a c átfogóra így jelöljük: a_c és b_c.

? Van-e összefüggés a befogók átfogóra eső vetülete és a derékszögű háromszög oldalai között? Igen.

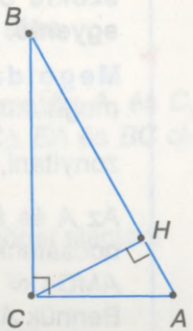
Egy ezek közül az összefüggések közül magától értetődő: $a_c + b_c = c$. Más összefüggések bizonyítást igényelnek.

Az x szakaszt az a és b szakaszok ***mértani középarányosának*** nevezzük, ha teljesül az $a : x = x : b$ egyenlőség.

A meghatározásból következik, hogy $x^2 = ab$. Tehát **két szakasz mértani középének négyzete a szakaszok szorzatával egyenlő.**

A derékszögű háromszögben három mértani középarányos jelölhető ki: az átfogóra bocsátott magasság és a két befogó.

Tantétel (a mértani középarányosokról a derékszögű háromszögben).
A derékszögű háromszögben:
1) az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe a befogók átfogóra eső vetületeinek;
2) a befogó mértani közepe az átfogó és a befogónak az átfogóra eső vetületének.



301. ábra

Adva: $ACB\Delta$ (301. ábra), $C\angle = 90°$, CH magasság.

Bebizonyítani: 1) $CH^2 = AH \cdot BH$;
2) $BC^2 = BA \cdot BH$ és $AC^2 = AB \cdot AH$.

Bizonyítás.
1) $AHC\Delta \sim CHB\Delta$ két szög egyenlősége alapján. Mindkettőben van derékszög, $ACH\angle = CBH\angle$.

A háromszögek hasonlóságából következik: $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$.

Innen $CH^2 = AH \cdot BH$.

2) Az AHC és CHB háromszögek hasonlók az ACB háromszöghöz megfelelő szögeik egyenlősége alapján.

Kapjuk:

a) $AHC\Delta \sim ACB\Delta$,

mert $\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$,

ahonnan $AC^2 = AH \cdot AB$.

b) $CHB\Delta \sim ACB\Delta$,

mert $\frac{BH}{BC} = \frac{CB}{AB}$,

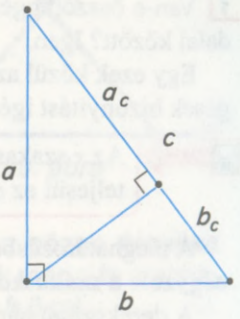
ahonnan $BC^2 = BH \cdot BA$.

Következmény. **A befogók átfogóra eső vetületei úgy aránylanak, mint a befogók négyzetei.**

Valóban, a mértani középarányosokról a derékszögű háromszögben szóló tétel szerint a befogók négyzetei megfelelően egyenlők

$a^2 = ca_c$, $b^2 = cb_c$ (302. ábra).

Ahonnan $\frac{a^2}{b^2} = \frac{ca_c}{cb_c} = \frac{a_c}{b_c}$, innen $\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2}$.



302. ábra.

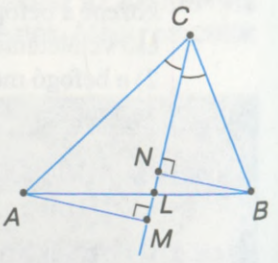
? Már tanultátok, hogy a szögfelező két egyenlő részre osztja a háromszög szögét. Van-e összefüggés azon szakaszok között, amelyekre a szögfelező a háromszög oldalát osztja? Igen.

Feladat (a háromszög szögfelezőjének tulajdonsága). **A háromszögben a szögfelező a szemben fekvő oldalt olyan szakaszokra osztja, amelyek aránya a szöget bezáró oldalak arányával egyenlő.** Bizonyítsuk be!

Megoldás. Legyen CL az ABC háromszögben meghúzott szögfelező (303. ábra). Be kell bizonyítani, hogy $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC}$.

Az A és B pontokból AM és BN merőlegeseket bocsátunk a CL egyenesre.

$AMC\Delta \sim BNC\Delta$ két szög egyenlősége alapján. Bennük $AMC\angle = BNC\angle = 90°$, $ACM\angle = BCN\angle$, így CL a $C\angle$ szögfelezője.



303. ábra

Innen $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BN}$. (1)

$AML\Delta \sim BNL\Delta$ két szög egyenlősége alapján.

Bennük $AML\angle = BNL\angle = 90°$, $ALM\angle = BLN\angle$ mint csúcsszögek.

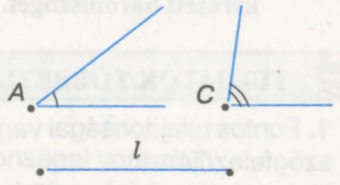
Innen $\frac{AM}{BN} = \frac{AL}{BL}$. (2)

Az (1) és (2) egyenlőségekből kapjuk: $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC}$.

A háromszögek hasonlóságát alkalmazzák nem csak a feladatok megoldásánál és bizonyításoknál, hanem szerkesztési feladatoknál is.

Feladat. Szerkesszünk háromszöget A és C szögei, valamint a B szög szögfelezője alapján!

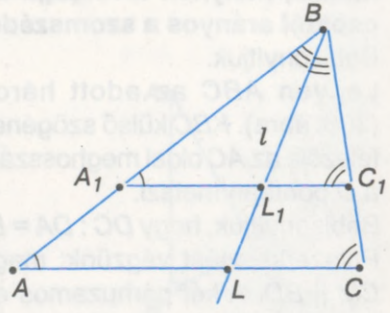
Adva:



Szerkesszük meg az $A_1BC_1\Delta$, melyben $A_1\angle = A\angle$, $C_1\angle = C\angle$, l a $B\angle$ szögfelezője.

Megoldás.

Elemzés (304. ábra). Az A és B szögek meghatároznak egy, a keresett háromszöghöz hasonló háromszöget, az l szögfelező pedig a keresett háromszög méreteit. Legyen A_1BC_1 a keresett háromszög. Eltekintünk a feladat feltételétől, miszerint l a $B\angle$ szögfelezője, vagyis hogy $BL_1 = l$. Így megszerkeszthető a kisegítő $ABC\Delta \sim A_1BC_1\Delta$ az A és C adott szögek alapján. A $B\angle$ ($BL_1 = l$) szögfelezőn fekvő L_1 ponton keresztül áthaladó $A_1C_1 \parallel AC$ egyenes az ABC háromszögből hasonló háromszöget metsz ki. Tehát a keresett háromszög A_1 és C_1 csúcsai megfelelően az A_1C_1 egyenesnek a kisegítő $ABC\Delta$ BA és BC oldalával való metszéspontja lesz.



304. ábra

Szerkesztés.

1. Szerkesztünk egy kisegítő ABC háromszöget A és C szögei alapján!
2. Megrajzoljuk a B szög BL szögfelezőjét.
3. A BL félegyenesre rámérjük a $BL_1 = l$ szakaszt.
4. Az L_1 ponton keresztül meghúzzuk az $A_1C_1 \parallel AC$ egyenest.

Bizonyítás.
Szerkesztés szerint az A_1BC_1 háromszögben: $A_1\angle = A\angle$, $C_1\angle = C\angle$, BL_1 a B szög szögfelezője és $BL_1 = l$. Tehát A_1BC_1 a keresett háromszög.

A háromszögek hasonlóságának alkalmazását a szerkesztési feladatok megoldásánál a *hasonlóság módszerének* nevezzük.

A háromszög szerkesztésére vonatkozó feladat megoldásakor a hasonlóság módszerével az alábbi lépéseket vesszük figyelembe:

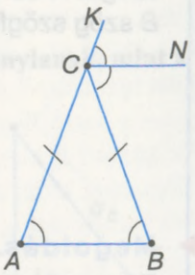
1) **ki kell választani a feladatban az adott feltételek közül azokat, melyek meghatározzák a keresett háromszög alakját;**
2) **meg kell szerkeszteni a keresett háromszöghöz hasonló segédháromszöget;**
3) **a háromszög méreteit meghatározó adatok alapján meg kell szerkeszteni a keresett háromszöget.**

TUDJATOK TÖBBET!

1. Fontos tulajdonságai vannak a háromszög külső szöge szögfelezőjének.

Ha a háromszög egyenlő szárú, a külső szög szögfelezője párhuzamos az alappal (305. ábra).

Ha a háromszög nem egyenlő szárú, **akkor a külső szög szögfelezője a szemben fekvő oldalt olyan pontban metszi, melynek távolsága az oldalhoz tartozó csúcsoktól arányos a szomszédos oldalakkal.**



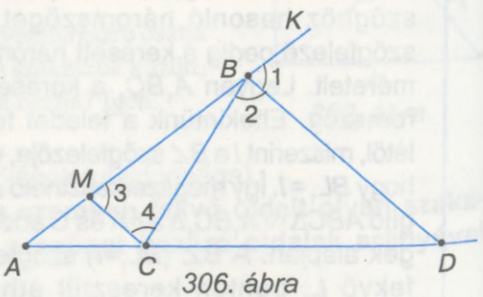
305. ábra

Bebizonyítjuk.

Legyen ABC az adott háromszög (306. ábra). KBC külső szögének szögfelezője az AC oldal meghosszabbítását a D pontban metszi.

Bebizonyítjuk, hogy $DC : DA = BC : BA$.

Pótszerkesztést végzünk: meghúzzuk $CM \parallel BD$. A két párhuzamos egyenes metszi az A szög szárait, ezért Thalész tételének értelmében $AC : CD = AM : MB$ vagy $AD : CD = AB : MB$.



306. ábra

De $MB = CB$, mivel $BCM\Delta$ egyenlő szárú.

Valóban, benne $3\angle = 4\angle$, mivel $1\angle = 2\angle$ (BD a KBC szög szögfelezője);

$1\angle = 3\angle$ mint egyállású szögek ($BD \parallel CM$, AB metsző egyenes);

$2\angle = 4\angle$ mint belső váltószögek ($BD \parallel CM$, BC metsző egyenes).

Tehát $AD : CD = AB : CB$, vagyis $DC : DA = BC : BA$.

Vizsgáljátok meg önállóan azt az esetet, amikor az ABC háromszög hegyesszögű, és $AB > BC$ ($AB > AC$).

2. A mértani szerkesztések elméletének fejlesztésében jelentős szerepet játszott a kiváló ukrán matematikus, Olekszandr Sztepanovics Szmogorzsevszkij (1896–1969), aki a Vinnicai terület Liszovi Berlinci községében született. Tanároknak és tanulóknak szóló munkáiban a tudós feltárja a szerkesztési feladatok megoldásának sajátosságait különböző eszközökkel; körzővel és vonalzóval; csak körzővel; csak vonalzóval. Napjainkig megőrizte értékét a *Szerkesztési feladatok vizsgálata* című könyve (1961).



O. Sz. Szmogorzsevszkij

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

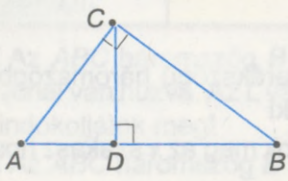
1. Milyen szakaszokat nevezünk a befogók átfogóra eső vetületeinek? Hogyan jelöljük ezeket a vetületeket?
2. Mi a két szakasz mértani közepe? Milyen tulajdonságai vannak?
3. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be az arányossági tantételeket a derékszögű háromszögben, valamint a tantétel következményét!

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

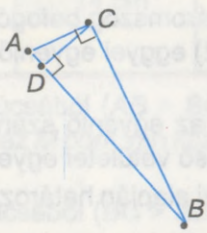
600'. Az ABC háromszög derékszögű (307–309. ábrák).

1) Melyek a befogók átfogóra eső vetületei?

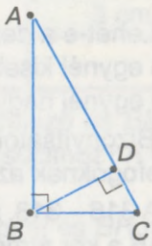
2) Írjátok fel a középarányos szakaszokat!



307. ábra



308. ábra



309. ábra

601'. Határozzátok meg két szám mértani középének négyzetét:

1) 3 és 12; 2) 2 és 12,5; 3) 1 és 9; 4) 2 és 8!

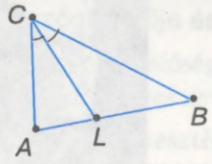
Mivel egyenlő a számok mértani közepe?

602'. A 310–312. ábrák alapján soroljátok fel:

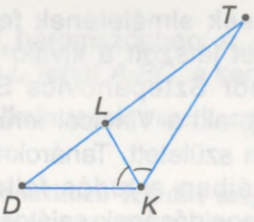
1) a szögfelezőket a háromszögekben;

2) a szöget bezáró oldalakat, melyek szögfelezője meg van húzva;

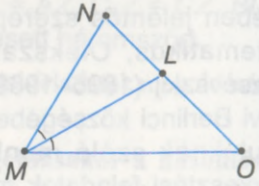
3) a szakaszokat, melyekre a szögfelező osztja a háromszög szemben fekvő oldalát. Hogy jelöljük ezeket a szakaszokat kisbetűkkel?



310. ábra



311. ábra



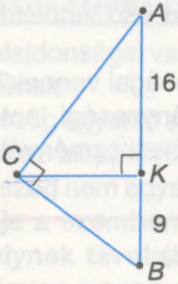
312. ábra

603'. Írjátok fel, mivel egyenlő a szakaszok aránya, melyekre a szögfelező osztja a háromszög szemben fekvő oldalát (310–312. ábra)!

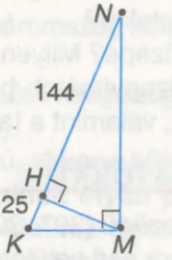
604°. A 313 – 315. ábrák adatai alapján határozzátok meg:

1) az átfogót; 2) a befogókat;

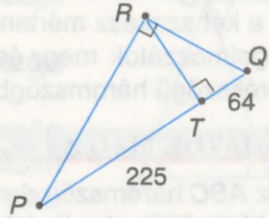
3) az átfogóhoz tartozó magasságot!



313. ábra



314. ábra



315. ábra

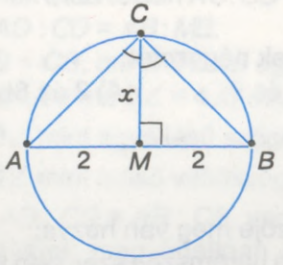
605°. Lehet-e a derékszögű háromszög befogójának aránya az átfogóhoz:

1) egynél kisebb; 2) eggyel egyenlő;

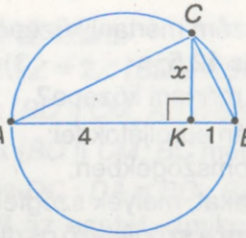
3) egynél nagyobb?

606°. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú derékszögű háromszögben a befogóknak az átfogóra eső vetületei egyenlők!

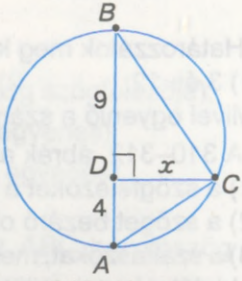
607°. A 316 – 318. ábrák adatai alapján határozzátok meg az x szakasz hosszát (AB a kör átmérője)!



316. ábra



317. ábra



318. ábra

608° A körvonal egy pontjából merőleges van húzva az átmérőre. Határozzátok meg ennek a pontnak a távolságát az átmérőtől, ha a merőleges talppontja az átmérőt két szakaszra osztja, melyek hossza:
1) 16 cm és 1 cm; 2) 0,5 cm és 8 cm; 3) 9 cm és 4 cm!

609° Bizonyítsátok be, hogy a kör tetszőleges pontjából az átmérőre bocsátott merőleges mértani közepe azon szakaszoknak, amelyekre a merőleges talppontja az átmérőt osztja!

610° Szerkesszétek meg azon szakaszok mértani középarányosát, melyek hossza:
1) 16 cm és 1 cm; 2) 0,5 cm és 8 cm; 3) 9 cm és 4 cm!

611° Szerkesszetek háromszöget a és b oldala, valamint az általuk bezárt C szög alapján! Húzzátok meg a C szög szögfelezőjét. Mérjétek meg a szakaszok hosszát, melyekre a szögfelező osztja a háromszög szemben fekvő oldalát, ha:
1) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $C\angle = 120°$; 2) $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, $C\angle = 60°$;
3) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $C\angle = 90°$!
Ellenőrizzétek, érvényesül-e a háromszög szögfelezőjének tulajdonsága!

612° Az ABC háromszögben a BD szögfelező az AC oldalt AD és DC szakaszokra osztja. Rajzoljátok át a munkafüzetbe a 21. táblázatot, és töltsétek ki!

21. táblázat

AB	10 cm	21 cm	3 cm	5 cm
BC	15 cm	18 cm		15 cm
AC	20 cm		4 cm	
AD		14 cm		3 cm
DC			2,5 cm	

613° Az ABC háromszög B csúcsából ($AB > BC$) BL szögfelező és BM súlyvonal van húzva. Az L vagy az M pont van közelebb a C csúcshoz? A választ indokoljátok meg!

614° Az ABC háromszög B csúcsából ($BC > AB$) BM súlyvonal és BH magasság van húzva. Az M vagy a H pont van közelebb az A csúcshoz? A választ indokoljátok meg!

615° Szerkesszetek háromszöget az alábbi adatok alapján:
1) $A\angle = 60°$, $C\angle = 90°$, $l_b = 4$ cm; 2) $A\angle = 50°$, $B\angle = 70°$, $l_c = 3$ cm;
3) $B\angle = 40°$, $C\angle = 140°$, $l_a = 3{,}5$ cm!

616. Bizonyítsátok be, hogy két derékszögű háromszög hasonló, ha az átfogóra bocsátott magasságaik az átfogókat egyenlő arányban osztják!

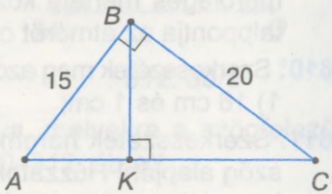
617. Az egyenlő oldalú háromszög súlyvonalának végpontjából merőleges van bocsátva a háromszög másik oldalára. Határozzátok meg a szakaszok arányát, melyre ez a merőleges osztja az oldalt!

618. A derékszögű háromszög hegyesszögei úgy aránylanak, mint 1 : 2. Határozzátok meg a befogók átfogóra eső vetületeinek arányát!

619. A derékszög csúcsából bocsátott merőleges az átfogót 1 : 3 arányban osztja. Határozzátok meg a háromszög szögeit!

620. A derékszögű háromszög befogói 15 és 20, átfogója 25. Határozzátok meg az átfogóra bocsátott magasságot!

Megoldás. Az $ABC\Delta$-ben (319. ábra) BK magasság van az átfogóra húzva. A derékszögű háromszögben a magasság tantétel alapján $BK^2 = AK \cdot CK$. A tantételből eredő következmény értelmében $\frac{AK}{CK} = \frac{AB^2}{CB^2}$.



319. ábra

Emellett $AK + CK = AC = 25$.

Kapunk egy egyenletrendszert: $\begin{cases} \frac{AK}{CK} = \frac{20^2}{15^2}, \\ AK + CK = 25. \end{cases}$

Megoldva ezt az egyenletrendszert, kapjuk: $AK = 16$, $CK = 9$. Tehát $BK^2 = 16 \cdot 9$, $BK = 12$.

A befogók átfogóra eső vetületeinek meghatározására a derékszögű háromszög ismert három oldala alapján:

1) egyenlővé kell tenni a befogók átfogóra eső keresett vetületeinek arányát a megfelelő befogók négyzeteinek arányával;

2) be kell írni, hogy a befogók átfogóra eső keresett vetületeinek összege az átfogóval egyenlő;

3) a kapott két egyenletből egyenletrendszert kell alkotni és megoldani azt.

621. Az egyenlő szárú háromszög alapja a, szára b, az alapra bocsátott magasság pedig c. Határozzátok meg a magasság talppontja és a háromszög szára közötti távolságot, ha:

1) $a = 12$ cm, $b = 10$ cm, $c = 8$ cm; 2) $a = 14$ cm, $b = 25$ cm, $c = 24$ cm!

622. Az a oldalú rombusz átlói d_1 és d_2. Határozzátok meg a rombusz magasságát, ha:

1) $a = 25$ cm, $d_1 = 30$ cm, $d_2 = 40$ cm; 2) $a = 169$ mm, $d_1 = 130$ mm, $d_2 = 312$ mm!

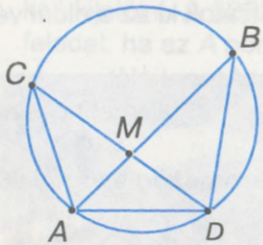
623. A 320–322. ábrák adatai alapján bizonyítsátok be az ábrázolt háromszögek hasonlóságát:

1) $ACM\Delta$ és $DBM\Delta$ (320. ábra); 2) $ADM\Delta$ és $CBM\Delta$ (321. ábra);

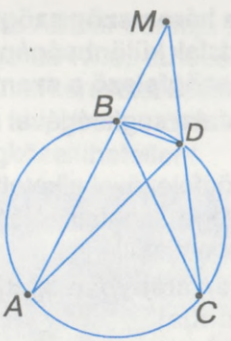
3) $ABC\Delta$ és $ACM\Delta$ (322. ábra)!

624. Ha egy kör *AB* és *CD* húrjai az *M* pontban metszik egymást, akkor $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Bizonyítsátok be!

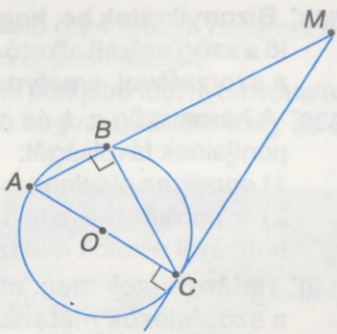
625. Ha a körön kívül felvett *M* pontból két szelőt húzunk, melyek a kört megfelelően az *A*, *B*, *C* és *D* pontokban metszik, akkor $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Bizonyítsátok be!



320. ábra



321. ábra



322. ábra

626. **Ha a körön kívül felvett *M* pontból szelőt húzunk, mely a kört *A* és *B* pontokban metszi, valamint érintőt *C* érintési ponttal, akkor $AM \cdot BM = CM^2$.** Bizonyítsátok be!

627. Szerkesszetek háromszöget két szöge és egy szögfelező alapján! Hány esetet kell megvizsgálni?

628. Szerkesszetek háromszöget oldalainak aránya, valamint:
1) legnagyobb súlyvonala; 2) legkisebb magassága alapján!

629. Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget:
1) a szárszög, valamint a magasság és az alap összege alapján;
2) a két nem egyenlő oldal aránya és a szárra bocsátott magasság alapján!

630. Szerkesszetek háromszöget a beírt kör középpontját a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai alapján!

631. Szerkesszetek derékszögű háromszöget legkisebb magassága, valamint a befogók átfogóra eső vetületei aránya alapján!

632. Egy körbe írjatok háromszöget:
1) mely hasonló az adott háromszöghöz;
2) melynek oldalai az adott háromszög oldalaival párhuzamosak!

633. Lehet-e adott körbe (adott kör köré) két, $k \neq 1$ hasonlósági együtthatójú háromszöget írni?

634. Egy szög belső tartományában levő ponton keresztül rajzoljatok a szög szárait érintő kört!

635.* Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű háromszög befogói szorzatának négyzete egyenlő az átfogó, és az átfogóra bocsátott magasság szorzatának négyzetével!

636.* A trapéz egyik alapján fekvő szögek összege 90°. Bizonyítsátok be, hogy a trapéz magassága a száraknak az alapra eső vetületeinek mértani közepe arányosa!

637.* Bizonyítsátok be, hogy az *ABC* háromszög *A* szögének szögfelezője azoknak a pontoknak a mértani helye, melyek *AB*:*AC* arányban osztják a szakaszokat, melyek végpontjai az *AB* és *AC* oldalakon vannak, és párhuzamosak a *BC* oldallal!

638.* **Bizonyítsátok be, hogy a háromszög szögfelezőjének négyzete egyenlő a szög szárait alkotó oldalak különbségének és annak a két szakasznak a szorzatával, amelyre a szögfelező a szemben fekvő oldalt osztja!**

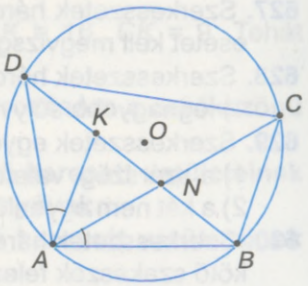
639.* A háromszög a, b és c oldalai segítségével számítsátok ki az a oldal végpontjainak távolságát:
1) ennek az oldalnak a szögfelezővel alkotott metszéspontjától;
2) a háromszög külső szöge szögfelezőjének ezen oldal meghosszabbításával alkotott metszéspontjától!

640.* **Határozzátok meg, milyen arányban osztja a háromszög szögfelezőit a szögfelezők metszéspontja!**

641.* A trapézt, melynek alapjai a és $4a$, az átló két hasonló háromszögre osztja, melyek mindegyikébe kör van írva. A kisebbik oldalt érintő kör sugara $0{,}25a$. Mivel egyenlő a másik kör sugara?

642.* A hegyesszögbe három kör van írva. A középső kör érinti a két másikat. Bizonyítsátok be, hogy a középső kör sugara a másik két kör sugarának mértani középarányosa!

643.* A 323. ábra alapján bizonyítsátok be, hogy:
1) $ADB\Delta \sim ACB\Delta$; 2) $BAC\Delta \sim BDC\Delta$;
3) $ADK\Delta \sim ACB\Delta$; 4) $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$!



323. ábra

644.* Szerkesszetek háromszöget két szöge és legnagyobb magassága alapján!

645.* Szerkesszetek háromszöget két szöge és legkisebb súlyvonala alapján!

646.* Szerkesszetek háromszöget két oldal aránya, az általuk bezárt szög és ezen szög szögfelezője alapján!

647.* Az ABC háromszögbe írjatok olyan háromszöget, melynek oldalai megfelelően merőlegesek az ABC háromszög oldalaira!

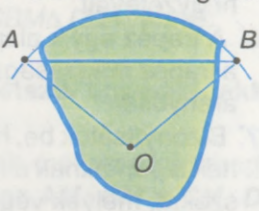
648.* Írjatok az ABC háromszögbe téglalapot, melynek alapja magasságának háromszorosa, és a háromszög alapján fekszik, két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalán!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

649. A befogók átfogóra eső vetületeinek tulajdonságát alkalmazva megszerkeszthető a derékszögű háromszög átfogójára bocsátott magasság szögmérő vagy derékszögvonalzó nélkül. Mondjátok el az eljárás menetét!

650. Hogyan jelölhető ki a négyzethálós papírlap kockáinak sarkában tizenkét pont úgy, hogy azok egy 5 négyzetnyi sugarú körvonalon feküdjenek?

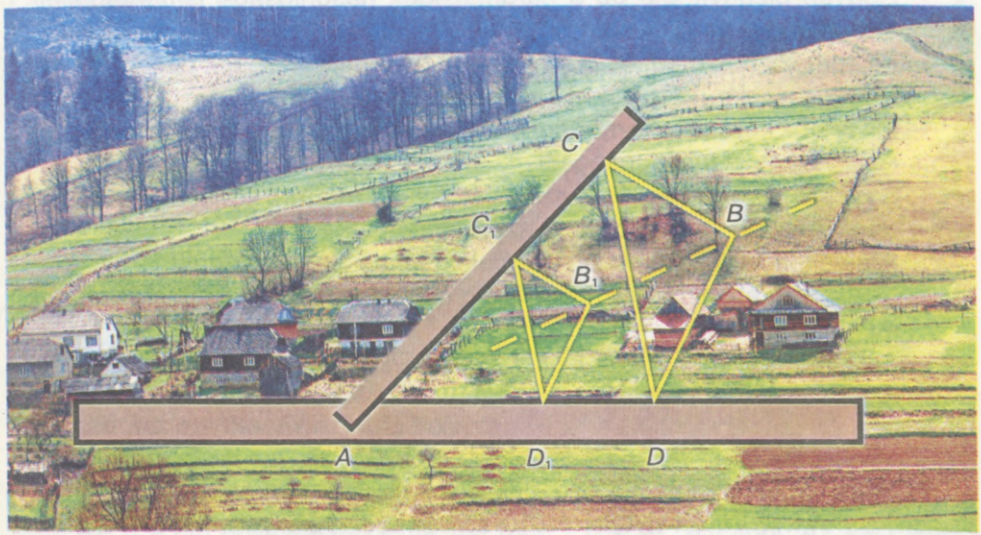
651. Hogyan szerkeszthető meg szögmérő nélkül a háromszög szögének szögfelezője?



324. ábra

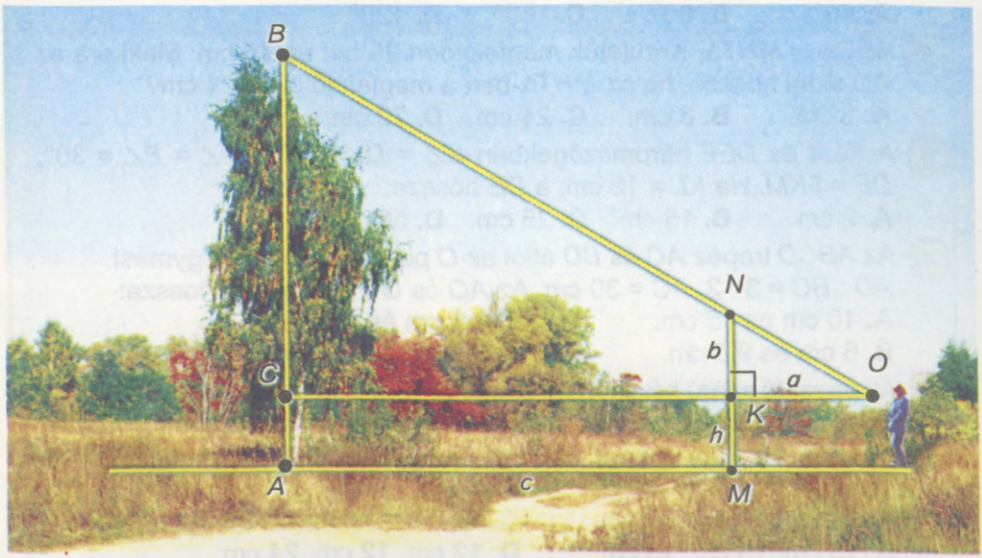
652. A körlap egy töredékén az AB húr darabja látható (324. ábra). Határozzátok meg szerkesztéssel az AB ívhez tartozó középponti szöget!

653. A B pontból az AC és AD utak kereszteződésének pontjába főút nyomvonalát kell kijelölni. A 325. ábra alapján mondjátok el, hogyan oldható meg ez a feladat, ha az A pont megközelíthetetlen!



325. ábra

654*. A 326. ábra bemutatja, hogyan mérhető meg a fa magassága egyetlen irányléc segítségével. Mondjátok el a mérés menetét!



326. ábra

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen háromszögeket mondunk hasonlóknak? Milyen tulajdonságai vannak a hasonló háromszögeknek?
2. Fogalmazzátok meg a párhuzamos szelők tételét!
3. Hogyan bizonyítható be a háromszögek hasonlósága ismertetőjeleik alapján?
4. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a háromszögek hasonlóságát: két szög alapján, két oldal és a közbezárt szög alapján, három oldal alapján!
5. Mit értünk két szakasz mértani középarányosán? Soroljátok fel a mértani középarányos tulajdonságait!
6. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a mértani középarányosokról a derékszögű háromszögben szóló tantételt!
7. Soroljátok fel a háromszög szögfelezőjének tulajdonságait!
8. Hogyan alkalmazható a hasonlóság módszere a szerkesztési feladatok megoldásánál?

TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvassátok el a feladatokat, és válasszátok ki az egyetlen helyes feleletet! A tesztfeladat elvégzésére 10–15 perc szükséges.

1. feladat

1 $A_1B_1C_1\Delta \sim ABC\Delta$. Az A szög 60°-os, a B szög 20°-kal kisebb, mint az $A\angle$. A C_1 szög fokmértéke:
A. 40°. **B.** 80°. **C.** 100°. **D.** 120°.

2 $ABC\Delta \sim MHT\Delta$. Kerületük megfelelően 25 cm és 75 cm. Mekkora az AC oldal hossza, ha az $MHT\Delta$-ben a megfelelő oldal 24 cm?
A. 3 cm. **B.** 8 cm. **C.** 24 cm. **D.** 72 cm.

3 A KLM és DEF háromszögekben $K\angle = D\angle = 90°$, $M\angle = F\angle = 30°$, $DF = 5KM$. Ha $KL = 10$ cm, a DE hossza:
A. 2 cm. **B.** 15 cm. **C.** 25 cm. **D.** 50 cm.

4 Az $ABCD$ trapéz AC és BD átlói az O pontban metszik egymást. $AD : BC = 3 : 2$, $AC = 30$ cm. Az AO és OC szakaszok hossza:
A. 10 cm és 15 cm. **C.** 12 cm és 18 cm.
B. 6 cm és 9,5 cm. **D.** 18 cm és 12 cm.

5* Az egyenlő szárú háromszög alapja 30 cm, szárai 60 cm hosszúak. Az alappal párhuzamos egyenes trapézt metsz ki a háromszögből, melynek kisebbik alapja a szárak összegével egyenlő. A trapéz ismeretlen oldalainak hossza:
A. 20 cm, 20 cm, 30 cm. **C.** 12 cm, 12 cm, 12 cm
B. 15 cm, 15 cm, 15 cm. **D.** 12 cm, 12 cm, 24 cm.

2. feladat

1 Az A szög szárain $AM = MB = 5$ cm és $AP = PC = 8$ cm szakaszokat mértek fel. A BC szakasz 4 cm-rel hosszabb AB-nél. A PM szakasz hossza:

A. 4 cm. **B.** 5 cm. **C.** 7 cm. **D.** 8 cm.

2 Az ABC és DEF háromszögek oldalai megfelelően arányosak. $AB = 3DE$, a háromszögek kerületeinek különbsége 84 cm. Az ABC háromszög kerülete:

A. 28 cm. **B.** 42 cm. **C.** 126 cm. **D.** 168 cm.

3 A háromszögben, melynek oldalai 7 cm, 15 cm és 20 cm, meghúzták a legkisebb szög szögfelezőjét. A szakaszok hossza, melyekre a szögfelező a szemben fekvő oldalt felosztotta:

A. 1,5 cm és 2 cm. **C.** 2 cm és 5 cm.

B. 3,5 cm és 3,5 cm. **D.** 3 cm és 4 cm.

4 Az $ABCD$ derékszögű trapéz alapjai: $AD = 9$ cm, $BC = 4$ cm. A trapéz szárára merőleges AC átló hossza:

A. 5 cm. **B.** 6 cm. **C.** 6,5 cm. **D.** 36 cm.

5* Az ABC háromszögben a BC oldalra bocsátott AH magasság 12 cm és $BH = 9$ cm hosszúságú szakaszt metsz ki a BC oldalból. Az AB oldal 15 cm nagyságú. A H pont távolsága az AB oldaltól:

A. 5,4 cm. **B.** 7,2 cm. **C.** 9,6 cm. **D.** 12 cm.

3. FEJEZET

SOKSZÖGEK.

A fejezetből ismereteket szereztek:

- a sokszögekről és alkotóelemeikről;
- a domború sokszögek szögeinek összegéről;
- a körbe írt és a kör köré írt sokszögek tulajdonságairól;
- mi a terület, milyen tulajdonságai vannak;
- hogyan számítható ki a háromszög, valamint egyes négyszögek: a négyzet, a téglalap, a paralelogramma, a rombusz, a trapéz területe



A SOKSZÖGEK TERÜLETE

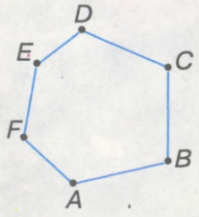




15. § A SOKSZÖG ÉS TULAJDONSÁGAI

Már ismeritek a háromszögeket és a négyszögeket. Jóval általánosabb a *sokszög* fogalma. A 327. ábrán *ABCDEF* sokszöget láthattok. A sokszöget *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FA* szakaszok alkotják úgy, hogy a szomszédos szakaszok nem egy egyenesen fekszenek, a nem szomszédosoknak pedig nincs közös pontjuk. A sokszöget alkotó szakaszok a sokszög *oldalai*, a szomszédos szakaszok által alkotott szögek a sokszög *szögei*, a szögek csúcsai a sokszög *csúcsai*.

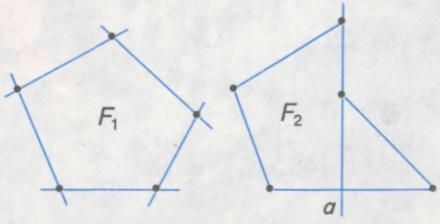
A csúcsok (szögek vagy oldalak) száma szerint a sokszög lehet háromszög, négyszög, ötszög stb. Ha az oldalak száma n, n oldalú sokszögről vagy n *szögről* beszélünk.



327. ábra



328. ábra



329. ábra

A sokszögek jelölése csúcsaik alapján történik. Például *ABCDEF* hatszög (327. ábra), $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszög (328. ábra).

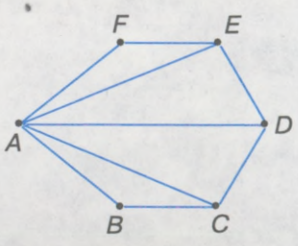
A 329. ábrán F_1 és F_2 sokszögek láthatók. Miben különböznek?

Az F_1 sokszög oldalain áthaladó egyenesek egyike sem metszi a sokszög többi oldalának egyikét sem. Ez a sokszög az oldalakon áthaladó bármelyik egyenes egy oldalán fekszik. Az ilyen sokszöget *domború* sokszögnek nevezzük. Az F_2 sokszög nem domború.

A továbbiakban csak domború sokszögekkel fogunk foglalkozni.

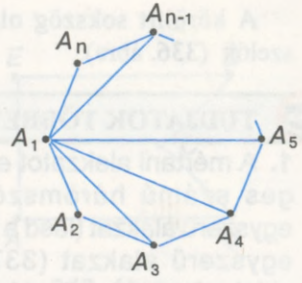
Az oldalak hosszúságának összegét a sokszög *kerületének* nevezzük. Jele P.

Vizsgáljuk meg a 330. ábrát. Az *ABCDEF* hatszögben az *AC*, *AD*, *AE* szakaszok az *A* csúcsot a nem szomszédos csúcsokkal kötik össze. Ezek a hatszög átlói.



330. ábra

A nem szomszédos csúcsokat összekötő szakaszt a sokszög ***átlójának*** nevezzük.



331. ábra

Tantétel (az *n* szög szögeinek összegéről).
Az *n* szög szögeinek összege $180° \times (n-2)$.

Adva: $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ – *n* szög (331. ábra).

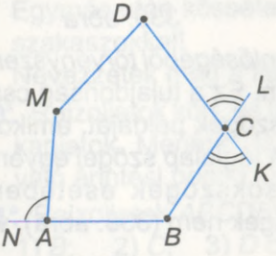
A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, ... A_1A_{n-1} a sokszög átlói.

Bebizonyítani:

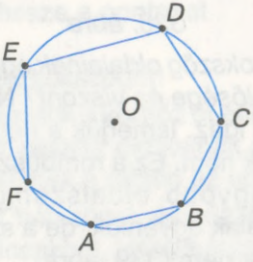
$A_1\angle + A_2\angle + A_3\angle + \ldots + A_n\angle = 180° \times (n-2)$.

Bizonyítás. Az adott *n* szögben az A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, ... A_1A_{n-1} átlók egy csúcsból, az A_1 csúcsból indulnak ki. Ezért az átlók *n*–2 háromszögre bontják az *n* szöget. A kapott háromszögek szögeinek összege az *n* szög szögeinek összegével egyenlő. Mivel mindegyik háromszögben a szögek összege 180°, ezért az adott *n* szög szögeinek összege $180° \times (n-2)$.

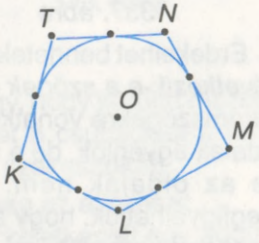
A sokszög belső szögével mellékszöget alkotó szöget a *sokszög külső szögének* nevezzük (332. ábra).



332. ábra



333. ábra

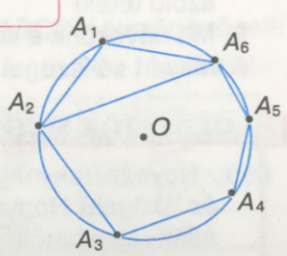


334. ábra

A sokszögek lehetnek körbe (333. ábra), vagy kör köré (334. ábra) írva. Próbáljátok megfogalmazni a megfelelő meghatározásokat, és hasonlítsátok össze a tankönyvben található meghatározásokkal.

A ***sokszöget,*** melynek mindegyik csúcsa a körvonalon fekszik, ***körbe írt sokszögnek,*** a kört pedig az adott sokszög ***köré írt körnek*** nevezzük.

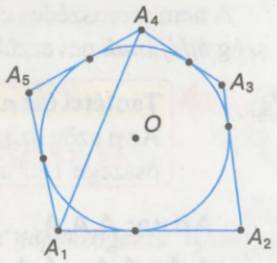
A beírt sokszög oldalai és átlói a kör húrjai, valamennyi szöge kerületi szög (335. ábra).



335. ábra

A ***sokszöget,*** melynek mindegyik oldala érinti a kört, ***körülírt sokszögnek*** nevezzük, a kört pedig az adott ***sokszögbe írt körnek.***

A körülírt sokszög oldalai a kör érintői, átlói pedig szelők (336. ábra).

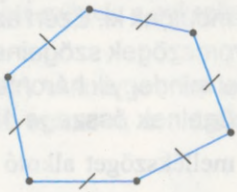


336. ábra

TUDJATOK TÖBBET!

1. A mértani alakzatot *egyszerűnek* nevezzük, ha véges számú háromszögre bontható. A sokszög egyszerű alakzat (lásd a 330., 331. ábrákat). A kör nem egyszerű alakzat (337. ábra). A körbe végtelen oldalszámú sokszöget írva is, a sokszög kontúrját csak közelítjük a körhöz. Ezért a körvonal hosszát és a körlap területét a mértanban más módszerekkel számítják ki, mint a sokszög kerületét és területét.


337. ábra


338. ábra


339. ábra

2. Érdekelhet benneteket: *a sokszög oldalainak egyenlőségéből törvényszerűen következik-e a szögek egyenlősége és viszont*? Nem. Ez a tulajdonság csak a háromszögekre vonatkozóan igaz. Ismerjük a négyszögek példáját, amikor az oldalak egyenlők, de a szögek nem. Ez a rombusz. A téglalap szögei egyenlők, de az oldalak nem. A nagyobb oldalszámú sokszögek esetében is megfigyelhetjük, hogy az oldalak egyenlők, de a szögek nem (338. ábra), vagy a szögek egyenlők, az oldalak nem (339. ábra).

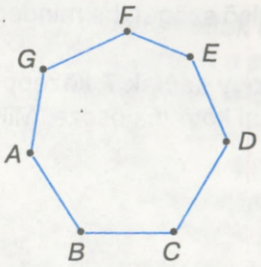
EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Mi a sokszög, az n szög? Hogyan jelöljük a sokszögeket?
2. Milyen szakaszt nevezünk a sokszög átlójának?
3. Mi a sokszög kerülete?
4. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a sokszög szögeinek összegéről szóló tételt!
5. Mit nevezünk a sokszög külső szögének?
6. Milyen sokszöget nevezünk a körbe írt és a kör köré írt sokszögnek?

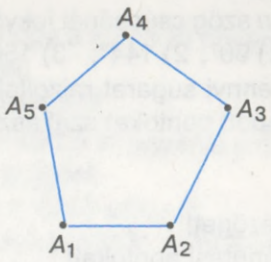
OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

655'. Nevezzétek meg a 340. és 341. ábrákon látható n szögek csúcsait, oldalait és szögeit! Hogyan nevezhetjük másként ezeket az alakzatokat? Milyen átlók rajzolhatók: 1) a B; 2) a C; 3) az F csúcsokból?

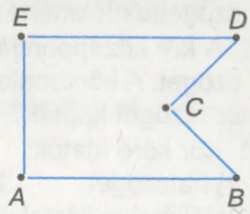
656'. A 342. ábrán látható sokszög miért nem domború?



340. ábra



341. ábra

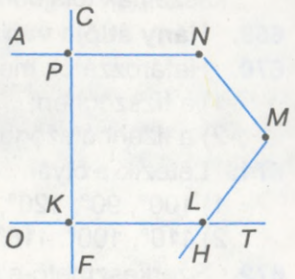


342. ábra

657'. Számítsátok ki az n szög kerületét, ha mindegyik oldal hossza 2 cm, és:
1) $n = 7$; 2) $n = 10$; 3) $n = 9$!

658'. Nevezzétek meg a 343. ábrán látható $KLMNP$ ötszög külső szögeit az alábbi csúcsoknál:
1) L; 2) P; 3) K!

659'. Rajzoljatok körvonalat, jelöljetek ki rajta:
1) hét pontot A_1-től A_7-ig;
2) nyolc pontot A_1-től A_8-ig!
Egymás után kössétek össze a pontokat szakaszokkal!
Nevezzétek meg a kapott sokszöget!



343. ábra

660'. Rajzoljatok kört, és húzzatok a körhöz öt érintőt úgy, hogy körülírt ötszöget kapjatok. Mérjétek le az ötszög oldalainak hosszát a csúcsoktól a körrel való érintési pontig. Jelöljétek a rajzon az egyenlő szakaszokat!

661°. Rajzoljatok $ABCDEOT$ hétszöget, és húzzátok meg az átlókat a:
1) B; 2) C; 3) D csúcsokból. Hány háromszög keletkezett egy adott csúcsnál?

662°. Mennyi a szögek összege:
1) az ötszögben; 2) a kilencszögben; 3) a tizenhétszögben?

663°. Hány csúcsa van az n szögnek, ha szögeinek összege:
1) 1440°; 2) 1080°; 3) 1620°?

664°. Hány csúcsa van az n szögnek, ha mindegyik szögének fokmértéke:
1) 90°; 2) 144°; 3) 156°?

665°. A 22. táblázat adatai alapján határozzátok meg az $ABCDM$ ötszög szögeit!

22. táblázat

$A\angle$	$n°$	$n° - 30°$	$n° - 20°$	$n°$
$B\angle$	$2n°$	$n° - 10°$	$n° - 10°$	$5n°$
$C\angle$	$4n°$	$n°$	$n°$	$7n°$
$D\angle$	$5n°$	$n°$	$n° - 30°$	$9n°$
$M\angle$	$6n°$	$n° + 30°$	$n°$	$5n°$

666°. Határozzátok meg az n szög csúcsánál fekvő külső szöget, ha mindegyik szögének fokmértéke: 1) 90°; 2) 144°; 3) 156°!

667°. A kör középpontjából annyi sugarat rajzoltak, hogy kaptak 7 középponti szöget. A körvonalon kapott pontokat szakaszokkal kötötték össze. Milyen sokszöget kaptak?

668°. Kör köré írjatok:
1) hatszöget; 2) ötszöget!
Jelöljétek a körrel való érintési pontokat!
Mérjétek le az oldalakon kapott szakaszokat! Beigazolódik-e az érintők szakaszainak tulajdonsága? Hogyan határozható meg a sokszög kerülete?

669. Hány átlója van az n szögnek?

670. Határozzátok meg az átlók számát:
1) a tízszögben;
2) a tizenhétszögben!

671. Létezik-e olyan ötszög, melynek szögei:
1) 100°, 90°, 120°, 116°, 113°;
2) 110°, 100°, 118°, 112°, 101°?

672. Szerkeszthető-e a háromszögön kívül olyan sokszög, melynek mindegyik szöge hegyesszög?

673. A sokszög három szöge:
1) 80°; 2) 90°.
A többi szög 150°-os. Hány csúcsa van a sokszögnek?

674. Az ötszög külső szögeinek aránya:
1) 3 : 4 : 5 : 7 : 8; 2) 1 : 2 : 4 : 5 : 6.
Milyen a belső szögek aránya?
Oldjátok meg a feladatot kétféle módon!

675. Bizonyítsátok be, hogy az n szög valamennyi belső és valamennyi külső szögének összege arányos csúcsainak számával!

676. Milyen képlettel számítható ki a körbe írt sokszög oldalára támaszkodó középponti szög, ha a sokszög oldalai egyenlők egymással?

677. Hány csúcsa van a körbe írt sokszögnek, ha az oldalakra támaszkodó mindegyik középponti szöge: 1) 60°; 2) 40°?

678*. Az ötszög kerülete 136,4 cm. Négy oldalának hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 6 : 7 : 8 : 11. Számítsátok ki az ötödik oldal hosszát!

679*. Bizonyítsátok be, hogy a sokszög mindegyik oldala kisebb kerületének felénél!

680*. Bizonyítsátok be, hogy a sokszög mindegyik szöge kisebb, mint 180°!

681*. Két sokszög mindegyikében a szögek egyenlők egymással. Az egyik sokszög szögei:1) kétszer kisebbek a másik sokszög szögeinél;
2) egyenlők a másik sokszög külső szögeivel. Hány csúcsa van mindegyik sokszögnek?

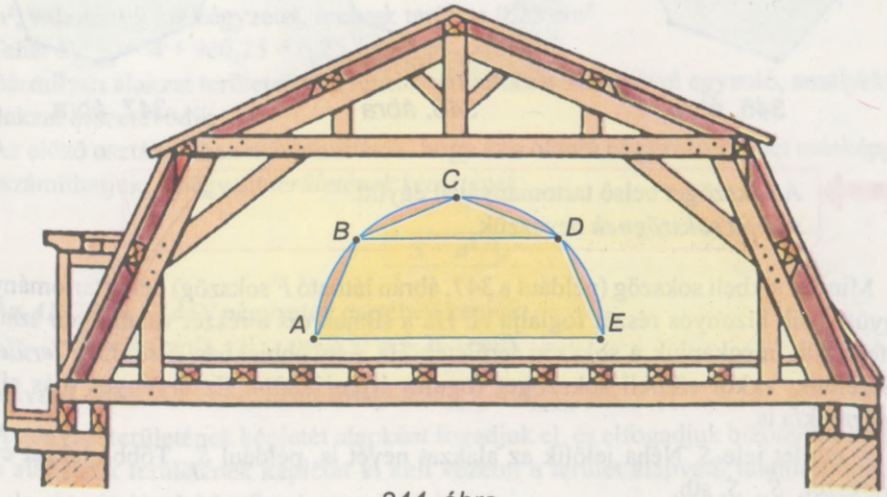
682.* Bizonyítsátok be, hogy a körbe írt egyenlő oldalú sokszögnek:
1) egyenlők a szögei;
2) egyenlők a külső szögei!

683.* Hány csúcsa van a körbe írt egyenlő oldalú sokszögnek, ha szöge:
1) egyenlő a külső szöggel;
2) kétszer nagyobb a külső szögnél;
3) úgy aránylik a külső szöghöz, mint 5 : 2?

684.* Bizonyítsátok be, hogy a körbe írt egyenlő oldalú n szög szöge $n > 4$ esetén nagyobb a külső szögnél!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

685. A legegyszerűbb manzárdtető függőleges metszete egy félbevágott nyolcszög, melynek oldalai és szögei egyenlők egymással (344. ábra). Határozzátok meg a BD födém szélességét, a nyolcszög oldalát, és az $ABDE$ manzárdszoba magasságát, ha $AE = 6$ m!



344. ábra



16. §. A TERÜLET FOGALMA. A TÉGLALAP TERÜLETE

A sokszög a síkot két részre, belső (345. ábra) és külső tartományra (346. ábra) osztja.



345. ábra



346. ábra



347. ábra

A sokszöget belső tartományával együtt ***síkbeli sokszögnek*** nevezzük.

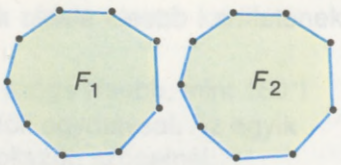
Minden síkbeli sokszög (például a 347. ábrán látható F sokszög) belső tartományával együtt a sík bizonyos részét foglalja el. Ha a síknak ezt a részét valamilyen számmal kifejezzük, megkapjuk a sokszög területét. Ha a továbbiakban *a sokszög területéről* beszélünk, akkor síkbeli sokszöget fogunk érteni alatta. Ez érvényes más síkbeli alakzatokra is.

A terület jele S. Néha jelölik az alakzat nevét is, például S_F. Több alakzat esetén indexszel, S_1, S_2 stb.

A 348. ábrán az F_1 és F_2 alakzatok egyenlők, mivel egymásra helyezve őket egybeesnek (fedik egymást). Értelemszerűen területük is egyenlő.

Leírhatjuk: $S_{F_1} = S_{F_2}$.

Az alakzat területének mérésére mértékegységet kell választani. A terület mérésének egységéül olyan négyzetet használunk, melynek oldala a hosszúság valamilyen mértékegysége. Az 1 cm oldalú négyzet területe a terület *négyzetcentiméterekben* való mérésének egysége, az 1 m oldalú négyzet pedig a terület *négyzetméterekben* való mérésének egysége stb.



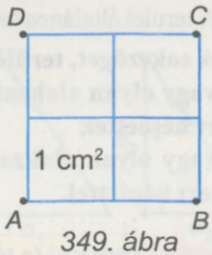
$F_1 = F_2$

348. ábra

A terület mértékegységét röviden így jelöljük: 1 cm², és így mondjuk: egy négyzetcentiméter. A centiméter a négyzeten kifejezés helytelen.

A terület mérésére szolgáló egyes egységeknek speciális nevük van: ár (10 m oldalhosszúságú négyzet), hektár (100 m oldalhosszúságú négyzet) stb.

A 349. ábrán *ABCD* négyzet látható, melynek oldala 2 cm. Ez a négyzet 4, egyenként 1 cm² területű négyzetből tevődik össze, vagyis területe 4 cm².



349. ábra

Leírhatjuk: $S_{ABCD} = 4$ cm².

Érthető módon bármilyen alakzat területe pozitív számmal van kifejezve.

? Változik-e az *ABCD* négyzet területe, ha mértékegységül 1 mm²-t használunk? Nem változik, csupán másképpen lesz kifejezve: $S_{ABCD} = 400$ mm².

A 350. ábrán a *KLMN* négyzet oldala 2,5 cm. Ennek a négyzetnek a területe 4 négyzetet tartalmaz, melyek területe 1 cm², valamint 9 kis négyzetet, melyek területe 0,25 cm².



350. ábra

Tehát $S_{KLMN} = 4 + 9 \cdot 0{,}25 = 6{,}25$ (cm²).

Bármilyen alakzat területe azon részek területének összegével egyenlő, amelyekből az alakzat összetevődik.

Az előző osztályokban már tanultátok, hogy az *a* oldalú négyzet területét másképpen is kiszámíthatjuk, a négyzet *területének képletével*:

$$S = a^2.$$

Az *ABCD* és *KLMN* négyzetek esetében kapjuk:
$S_{ABCD} = 2^2 = 4$ (cm²), $S_{KLMN} = 2{,}5^2 = 6{,}25$ (cm²).

Mivel 4 cm² < 6,25 cm², ezért írhatjuk: $S_{ABCD} < S_{KLMN}$.

A négyzet területének képletét alapként fogadjuk el, és elfogadjuk bizonyítás nélkül. Más alakzatok területének képletét ki kell vezetni a terület alapvető tulajdonságainak figyelembevételével. Megfogalmazzuk ezeket.

A terület általános tulajdonságai.

1. Minden alakzatnak nullánál nagyobb a területe.
2. Az egybevágó alakzatok területe egyenlő.
3. Az alakzat területe az alkotó alakzatok területeinek összegével egyenlő.
4. A terület mértékegysége a hosszúságegységgel egyenlő oldalú négyzet területe.

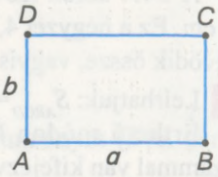
A terület általános tulajdonságai rávezetnek bennünket a terület képletének kivezetésére.

A sokszöget, területe képletének kivezetése céljából:

vagy olyan alakzatokra kell bontani, melynek területét ki tudjuk számítani ismert képlettel;

vagy olyan alakzattá kell kiegészíteni, melynek területét ki tudjuk számítani ismert képlettel.

Tantétel (a téglalap területéről).
A téglalap területe két szomszédos oldalának szorzatával egyenlő.



351. ábra

Adva: $ABCD$ téglalap (351. ábra).

$AB = a$, $AD = b$.

Bebizonyítani: $S_{ABCD} = ab$.

Bizonyítás. Az $ABCD$ téglalapot olyan $AMKN$ négyzetté egészítjük ki, melynek oldala $a + b$ (352. ábra).



352. ábra

Akkor $S_{AMKN} = (a + b)^2$.

Másrészről az $AMKN$ négyzet két, $ABCD$ és $OKLC$ téglalapból, és két, $BMOC$ és $DNLC$ négyzetből tevődik össze.

A terület harmadik tulajdonsága értelmében $S_{AMKN} = S_{ABCD} + S_{OKLC} + S_{BMOC} + S_{DNLC}$.

Az $ABCD$ és $OKLC$ téglalapok egyenlők, mert a és b szomszédos oldalaik egyenlők.

Ezért a második tulajdonságból eredően $S_{ABCD} = S_{OKLC}$.

A $BMOC$ és $DNLC$ négyzetek oldalai megfelelően a és b, tehát $S_{BMOC} = b^2$, $S_{DNLC} = a^2$. Tehát $S_{AMKN} = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2$.

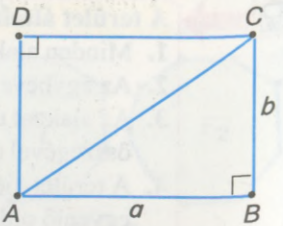
Továbbá kapjuk:

$(a + b)^2 = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2$, vagy $a^2 + 2ab + b^2 = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2$.

Innen $S_{ABCD} = ab$.

***Következmény.* Az a és b befogójú derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának felével egyenlő.**

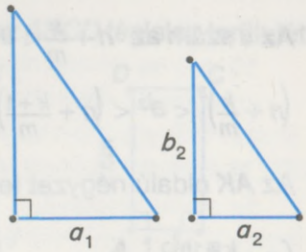
Valóban, az AC átló az a és b oldalú $ABCD$ téglalapot (353. ábra) két egyenlő a és b befogójú ABC és ADC derékszögű háromszögre bontja.



353. ábra

Tehát $S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab$.

Feladat. **Bizonyítsuk be, hogy a hasonló derékszögű háromszögek területének aránya hasonlósági együtthatójuk négyzetével egyenlő.**



354. ábra

Megoldás. Legyen az adott háromszögek (354 ábra) egyikének két befogója a_1 és b_1, területe S_1, a másik háromszög befogói a_2 és b_2, területe S_2, hasonlósági együtthatójuk k.

Bebizonyítjuk, hogy $\frac{S_1}{S_2} = k^2$.

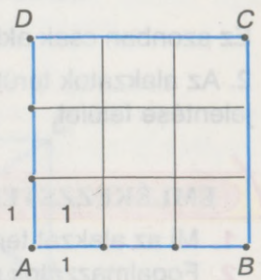
Mivel a háromszögek hasonlók, ezért $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$. Meghatározzuk a háromszögek területét és arányukat.

$$S_1 = \frac{1}{2}a_1b_1 = \frac{1}{2}ka_2 \cdot kb_2 = \frac{1}{2}k^2a_2b_2; \quad S_2 = \frac{1}{2}a_2b_2; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}k^2a_2b_2}{\frac{1}{2}a_2b_2} = k^2.$$

TUDJATOK TÖBBET!

1. Felvetődhet bennetek a kérdés: *hogyan bizonyítható be, hogy a négyzet területe egy oldalának négyzetével egyenlő?*

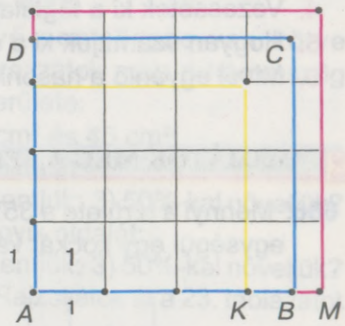
Legyen az *ABCD* négyzet oldala *a*. Két eset lehetséges: az *AB* oldal *n* egész számú egységnyi szakaszra bontható (355. ábra); az *AB* oldalon elhelyezhető *n* egységnyi szakasz, de maradékkal, mely kisebb az egy egységnyi szakasz hosszánál (356. ábra).



355. ábra

Megvizsgáljuk az első esetet (355. ábra). Osszuk fel az *AB* oldalt *n* egységnyi szakaszra (a rajzon 3 szakasz), akkor $a = n \ast 1 = n$. Hasonlóan felosztjuk az *AD* oldalt. Az osztópontokon keresztül merőlegeseket állítunk az *AB* és *AD* oldalakra. Ezek az egyenesek az *ABCD* négyzetet $n \ast n = n^2$ egyenlő négyzetre osztják, melyek területe 1.

Ezért $S_{ABCD} = n^2 \ast 1 = a^2 \ast 1 = a^2$.



356. ábra

Megvizsgáljuk a másik esetet (356. ábra). Az *AB* szakaszra ráhelyezhető *n* egységnyi szakasz, és marad egy egységnél kisebb szakasz. Ez azt jelenti, hogy az *n* egységnyi szakaszt magába foglaló *AK* szakasz kisebb az *AB* szakasznál, az $n + 1$ egységnyi szakaszt magába foglaló *AM* szakasz nagyobb az *AB* szakasznál.

Kaptunk egy egyenlőtlenséget: $n < a < n + 1$.

Az adott négyzet területének pontosabb értékelése szempontjából felosztjuk az egységnyi szakaszt *m* egyenlő részre. Akkor mindegyik rész hossza $\frac{1}{m}$ lesz. Az *AK* szakaszra $n + \frac{k}{m}$ szakasz helyezhető rá, az *AM* szakaszra pedig $n + \frac{k+1}{m}$.

Az a szám az $n+\frac{k}{m}<a<n+\frac{k+1}{m}$ értékhatárok között van, négyzete pedig $\left(n+\frac{k}{m}\right)^2<a^2<\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2$ között.

Az AK oldalú négyzet területe $\left(n+\frac{k}{m}\right)^2$, az AM oldalú négyzet területe pedig $\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2$.

Ezért az $ABCD$ négyzet területe $\left(n+\frac{k}{m}\right)^2<S_{ABCD}<\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2$ határok közötti.

Az osztópontok számát növelve az m szám felettébb nagy lesz. Az $ABCD$ négyzet területe és az a szám négyzete olyan határok között fekszik, hogy a különbség elhanyagolhatóan kicsi: $\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2-\left(n+\frac{k}{m}\right)^2=2\left(n+\frac{k}{m}\right)\cdot\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$.

Ez azonban csak akkor lehetséges, ha $S_{ABCD}=a^2$.

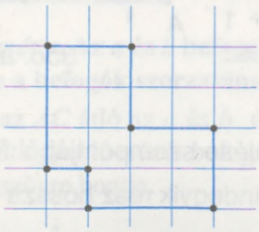
2. Az alakzatok területének S jelölése a latin *superficils* szóból ered, melynek jelentése felület.

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

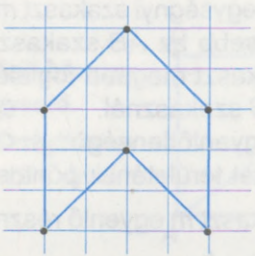
1. Mi az alakzat területe?
2. Fogalmazzátok meg a terület alaptulajdonságait!
3. Milyen egységekben mérjük a területet?
4. Vezessétek ki a téglalap területének képletét!
5. Hogyan számítjuk ki a derékszögű háromszög területét?
6. Mivel egyenlő a hasonló derékszögű háromszögek területének aránya?

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

686. Mennyi a területe a 357. és 358. ábrákon látható alakzatoknak, ha mértékegységül egy kockát választunk?

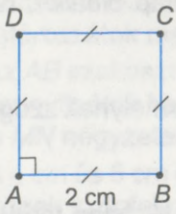


357. ábra

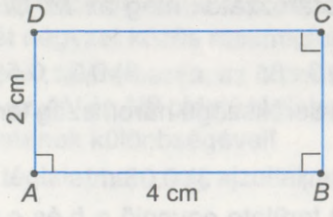


358. ábra

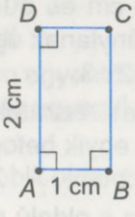
687'. A 359 – 360. ábrák adatai alapján számítsátok ki az *ABCD* téglalap területét!



359. ábra



360. ábra

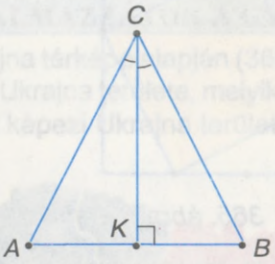


361. ábra

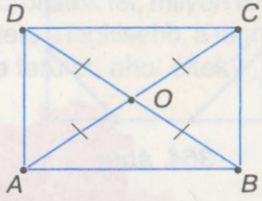
688'. Mennyi a derékszögű háromszög területe, ha befogói:
1) 3 cm és 5 cm; 2) 2 cm és 5 cm; 3) 10 cm és 4,5 cm?

689'. Határozzátok meg a négyzet oldalát, ha területe:
1) 16 cm²; 2) 9 cm²; 3) 121 cm²!

690°. Bizonyítsátok be, hogy:
1) $S_{AKC\Delta} = S_{BKC\Delta}$ (362. ábra); 2) $S_{AOB\Delta} = S_{COD\Delta}$ (363. ábra);
3) $S_{ABD\Delta} = S_{BAC\Delta}$ (363. ábra)!



362. ábra



363. ábra

691°. A háromszög belső tartományában fekvő pont össze van kötve szakaszokkal, a háromszög csúcsaival. Határozzátok meg a háromszög területét, ha az így keletkezett háromszögek területe:
1) 12 cm², 39 cm² és 45 cm²; 2) 90 cm², 25 cm² és 45 cm²!

692°. Hogyan változik a téglalap területe, ha egyik oldalát:
1) 3-szorosára növeljük; 2) 4-szeresére csökkentjük; 3) 50%-kal növeljük?

693°. Hogyan változik a téglalap területe, ha mindegyik oldalát:
1) 3-szorosára növeljük; 2) 4-szeresére csökkentjük; 3) 50%-kal növeljük?

694°. Az *a* és *b* oldalú téglalap kerülete *P*, területe *S*. Rajzoljátok át a 23. táblázatot a munkafüzetbe, és töltsétek ki!

23. táblázat

a	4 cm			8 cm
b		12 cm	7 cm	
P	11 cm		21 cm	
S		6 cm²		4 cm²

695° Az *ABCD* és *MTOH* téglalapok egyenlő területűek. Az *ABCD* téglalap oldalai 10 cm és 60 cm. Határozzátok meg az *MTOH* téglalap oldalait, ha úgy aránylanak egymáshoz, mint:
1) 2 : 3; 2) 3 : 8; 3) 0,3 : 0,5!

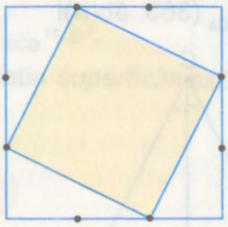
696° Határozzátok meg a derékszögű háromszög területét, melynek szöge 45°, és egyik befogója:
1) 2 cm; 2) 0,3 dm; 3) 0,05 m!

697° Az a oldalú négyzet területe egyenlő a b és c oldalú téglalap területével. Határozzátok meg mindkét négyszög kerületét, ha:
1) $a = 6$ cm, $b = 9$ cm; 2) $a = 6$ cm, $c = 2$ cm; 3) $a = 10$ cm, $c = 20$ cm!
A két négyszög közül melyiknek kisebb a kerülete?

698. Az a oldalú négyzet oldalait három egyenlő részre osztották, és az osztópontokat a 364. és 365. ábrákon látható módon kötötték össze. Határozzátok meg a négyzetekben látható alakzatok területét!



364. ábra



365. ábra

699. Két négyzet kerületének különbsége c, területük különbsége d. Határozzátok meg a négyzetek területét, ha:
1) $c = 16$ cm, $d = 56$ cm^2; 2) $c = 12$ cm, $d = 105$ cm^2!

700. A téglalap alakú képkeret szélessége c, területe S. Határozzátok meg a belső és külső részek kerületét, ha:
1) $c = 2$ cm, $S = 96$ cm^2; 2) $c = 3$ cm, $S = 564$ cm^2!

701. A téglalap területe S. Állítsatok össze képletet a téglalap oldalainak kiszámítására, ha az oldalak úgy aránylanak, mint $m : n$!

702. A téglalap kerülete P. Állítsatok össze képletet a téglalap oldalainak kiszámítására, ha az oldalak úgy aránylanak, mint $m : n$!

703. Mi a geometriai jelentése az alábbi képleteknek $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ esetén:
1) $(a + b)c = ac + bc$; 2) $(a - b)c = ac - bc$;
3) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$?

704. A derékszögű háromszög befogói a és b. Az O pont mindegyik befogótól d távolságra van.
Határozzátok meg ennek a pontnak az átfogótól való távolságát, ha:
1) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $d = 1$ cm; 2) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $d = 2$ cm!

705. Két 10 cm oldalú négyzet úgy helyezkedik el egymáshoz viszonyítva, hogy csúcsuk a másik négyzet átlóinak metszéspontjában van. Határozzátok meg a két négyzet közös részének területét!

706. Az AB szakaszt az M pont felére osztja, az N pont két nem egyenlő részre. Bizonyítsátok be, hogy az AN és NB oldalú téglalap területe egyenlő az MB és MN négyzetek területének különbségével!

707. A 4 cm és 6 cm oldalú téglalapban megrajzolták a nagyobbik oldalon fekvő szögek szögfelezőit. Határozzátok meg, milyen részekre van felosztva ezáltal a téglalap területe!

708. Ha az A, B és C pontok egy egyenesen fekszenek, akkor $AB^2 + BC^2 = AC^2 - 2AB \times BC$. Igaz-e ez az állítás?

709. **Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű háromszög területe egyenlő az átfogó, és az átfogóra bocsátott magasság szorzatának felével!**

710. Bizonyítsátok be, hogy azoknak a háromszögeknek a területei, melyekre a derékszögű háromszöget az átfogóra bocsátott magasság osztja, úgy aránylanak egymáshoz, mint a befogók átfogóra való vetületei!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

711. Ukrajna térképe alapján (366. ábra) soroljátok fel, milyen részekből tevődik össze Ukrajna területe, melyik rész területe a legkisebb, a legnagyobb! Milyen részét képezi Ukrajna területének az a terület, ahol éltek?



366. ábra

712° Egy földrészleg területe 6 ár. Mennyi ennek a földrészlegnek a területe négyzetméterekben és hektárban kifejezve?

713° A téglalap alakú földrészleg méretei az 1 : 100 méretarányú tervrajzon 10 cm és 25 cm. Mekkora a földrészleg területe?

714. Egy téglalap alakú linóleumdarab méretei 9 m × 4 m. Elegendő-e a linóleum két szoba padlójának burkolására, melyek méretei 2 m × 8 m és 4 m × 5 m?

715. Legalább milyen területűnek kell lennie egy dupla garázsnak (két autó részére), ha az autók méretei 4,5 m × 1,8 m, hogy a két autó között, valamint a fal és az autók között 1 m átjárás legyen?

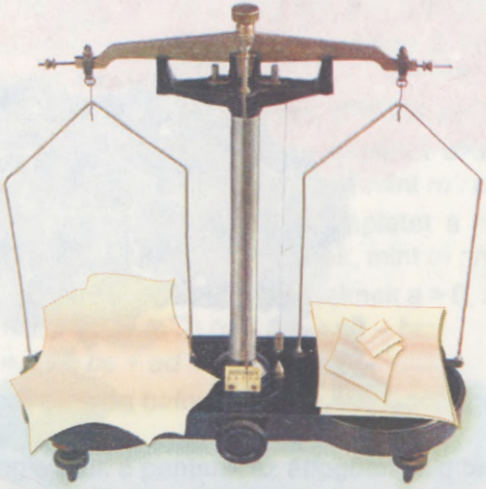
716. Végezzétek el a megfelelő méréseket, és számítsátok ki, hány tekercs tapétára van szükség (a minta illesztése nélkül) otthoni szobátok tapétázására, ha egy tekercs hossza 10,5 m, szélessége 0,6 m?

717. Végezzétek el a megfelelő méréseket, és számítsátok ki, hány darab 20 × 30 cm méretű csempére van szükség fürdőszobátok csempézésére?

718. Végezzétek el a megfelelő méréseket, és számítsátok ki, hány darab 30 × 5 cm méretű téglalap alakú parkettára van szükség szobátok parkettázására!

719. Végezzétek el a megfelelő méréseket, és számítsátok ki, hány darab 138 × 19,5 cm méretű téglalap alakú laminált lapra van szükség szobátok burkolására!

720* Az alakzatok területe mérlegeléssel is meghatározható. E célból az alakzatot kartonra rajzoljuk, majd kivágjuk a körvonalak mentén. Ugyanebből az anyagból megfelelő méretű négyzetet vágunk ki. Ezután összehasonlítjuk a két alakzat tömegét. Magyarázzátok meg, min alapszik ez a módszer!





17. § A PARALELOGRAMMA TERÜLETE

Már ismeritek a négyzet, a téglalap és a derékszögű háromszög területe kiszámításának képletét. Kivezetjük a paralelogramma területének meghatározására szolgáló képletet.

Tantétel (a paralelogramma területéről).
A paralelogramma területe az oldal, és erre az oldalra bocsátott magasság szorzatával egyenlő.

Adva: $ABCD$ paralelogramma (367. ábra).
DH magasság,
$AB = a$, $DH = h_a$.

Bebizonyítani: $S_{ABCD} = ah_a$.

Bizonyítás. A C csúcsból $CM = DH = h_a$ magasságot húzunk (368. ábra). Kapunk egy $AMCD$ trapézt. Megvizsgálunk két alakzatpárt, amelyek a trapézt alkotják: az adott $ABCD$ paralelogrammát és a $BMC\Delta$-et, valamint a $HMCD$ téglalapot és az $AHD\Delta$-et. A terület harmadik tulajdonsága alapján $S_{AMCD} = S_{ABCD} + S_{BMC\Delta}$, úgyszintén $S_{AMCD} = S_{HMCD} + S_{AHD\Delta}$.

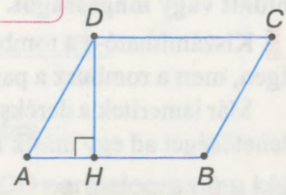
Ezért $S_{ABCD} + S_{BMC\Delta} = S_{HMCD} + S_{AHD\Delta}$.

$BMC\Delta = AHD\Delta$ a befogó és az átfogó alapján: $CM = DH$, mint a paralelogramma AB oldalára bocsátott magasságok, $AD = BC$, mint a paralelogramma szemben fekvő oldalai.

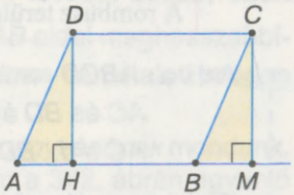
A terület második alaptulajdonsága szerint $S_{BMC\Delta} = S_{AHD\Delta}$. Tehát $S_{ABCD} = S_{HMCD}$.

A $HMCD$ téglalap területe: $S_{HMCD} = CD \times DH = AB \times h_a = ah_a$.

A bizonyítás szerint az adott $ABCD$ paralelogramma területe egyenlő a $HMCD$ téglalap területével, ezért $S_{ABCD} = ah_a$.



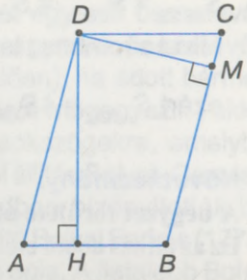
367. ábra



368. ábra

Feladat. A paralelogramma oldalai 8 cm és 6,4 cm, a nagyobbik oldalra bocsátott magasság 6 cm. Határozzátok meg a kisebbik oldalra bocsátott magasságot!

Megoldás. Adott az $ABCD$ paralelogramma (369. ábra), melyben $AB = 6{,}4$ cm, $BC = 8$ cm, $DM = 6$ cm. Meg kell határozni a DH magasságot.



369. ábra

Az $ABCD$ paralelogramma területét kiszámíthatjuk a BC oldal és a DM magasság szorzatával, másrészt az AB oldalnak és a DH magasságnak a szorzataként.

Ebből következik:

$S_{ABCD} = BC \cdot DM = 8 \cdot 6 = 48$ (cm²), (1)

$S_{ABCD} = AB \cdot DH$. (2)

Az (1) és a (2) egyenletekből kapjuk: $DH = S_{ABCD} : AB = 48 : 6{,}4 = 7{,}5$ (cm).

A paralelogramma ismeretlen oldalának vagy magasságának kiszámítására először kétféleképpen kiszámítjuk a területét. Egyrészt az egyik oldal és ezen oldalra húzott magasság szorzatával, másrészt a másik oldal és a hozzá húzott magasság szorzatával, majd egyenletet állítunk össze, és kiszámítjuk abból az ismeretlen oldalt vagy magasságot.

? Kiszámítható-e a rombusz területe az oldal és a hozzá húzott magasság szorzatával?

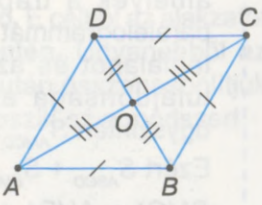
Igen, mert a rombusz a paralelogramma speciális esete.

Már ismeritek a derékszögű háromszög területének kiszámítását befogói alapján. Ez lehetőséget ad egy másik képlet kivezetésére a rombusz területének kiszámítására.

Tantétel (a rombusz területéről átlói alapján).
A rombusz területe átlói szorzatának felével egyenlő.

Adva: $ABCD$ rombusz (370. ábra),
AC és BD átlók,
$AC = d_1$, $BD = d_2$.

Bebizonyítani: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.



370. ábra

Bizonyítás. Az $ABCD$ rombusz oldalai egyenlők. Az AC és BD átlók merőlegesek egymásra, és metszéspontjuk felezi az átlókat. Ezért az átlók a rombuszt négy, ABO, CBO, CDO, ADO egybevágó derékszögű háromszögre bontják, melyek befogói $\frac{d_1}{2}$ és $\frac{d_2}{2}$.

$$S_{ABO\triangle} = S_{CBO\triangle} = S_{CDO\triangle} = S_{ADO\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}.$$

Mivel a rombusz területe a négy háromszög területének összegével egyenlő,

ezért $S_{ABCD} = 4S_{ABO\triangle} = 4 \cdot \frac{d_1 d_2}{8} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

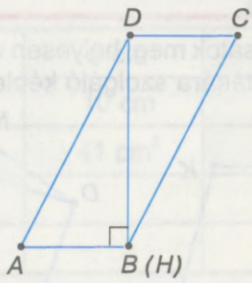
Következmény.

A négyzet területe átlója négyzetének felével egyenlő.

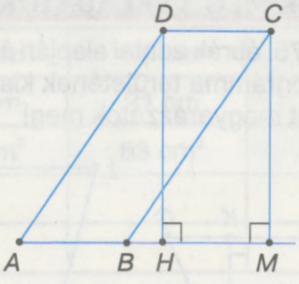
Ez az állítás abból ered, hogy a négyzet a rombusz egy fajtája, melynek átlói egyenlők egymással. Például legyen az átló d. Tehát $S = \frac{1}{2} d^2$.

TUDJATOK TÖBBET!

1. Felmerülhet a kérdés: *függ-e az ABCD paralelogramma területének képlete a DH magasság helyzetétől* (368. ábra)? Nem függ. A *H* pont helyzetének három esete lehetséges. Egy esetet már megvizsgáltunk. A másik két eset a következő: a *H* pont vagy a paralelogramma *B* csúcsában van (371. ábra), vagy az *AB* oldal meghosszabbításán (372. ábra).



371. ábra



372. ábra

Ha a *H* pont a *B* csúcsban van (371. ábra), akkor az *ABCD* paralelogramma két egybevágó, *ABD* és *CDB* derékszögű háromszögből tevődik össze, ezért $S_{ABCD} = 2 \times S_{ABD\Delta} = 2 \times \frac{1}{2} \times AB \times DH = ah_a$. Ha a *H* pont az *AB* oldal meghosszabbításán van (372. ábra), akkor a bizonyítás a tankönyvben bemutatott módon történik. Végezzétek el a bizonyítást önállóan!

2. Két alakzatot, melyeknek egyenlő a területe, *egyenlő nagyságúnak* mondunk. Például az *ABCD* paralelogramma és a *HMCD* téglalap a 372. ábrán egyenlő nagyságú. Érthető módon két egybevágó sokszög mindig egyenlő nagyságú, azonban két egyenlő nagyságú sokszög nem mindig egybevágó.

Két sokszöget *egyenlő összetevőjűnek* mondunk, ha azokat egyenlő számú, páronként egybevágó sokszögekre, például háromszögekre lehet bontani. Ilyen az *ABCD* paralelogramma és a *HMCD* téglalap a 368. ábrán. Mindegyik alakzat közös trapézból, valamint egymással egyenlő *ADH* és *BCM* derékszögű háromszögekből tevődik össze.



Bolyai János

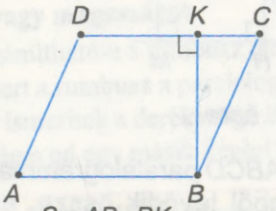
Az egyenlő nagyságú és egyenlő összetevőjű alakzatok között kapcsolat van: bármelyik két egyenlő összetevőjű sokszög egyenlő nagyságú (az egyenlő összetevőjű sokszögek meghatározásából eredően); ha adott bármely két egyszerű sokszög, melyek területe megegyezik , akkor az első felosztható olyan kisebb sokszögekre, amelyből kirakható a másik sokszög. Ez utóbbi állítás Bolyai–Gerwien-tétel néven ismert. A XIX. században bizonyították be. Érdekes tény, hogy a tételt bebizonyító Bolyai Farkas (1775–1856, Magyarország), Bolyai János apja. A fiatalabb Bolyai a nem euklideszi geometria egyik megteremtője volt.

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Milyen képlettel számítható ki a paralelogramma területe?
2. Hogyan vezethető ki a paralelogramma területének képlete az oldal és erre az oldalra bocsátott magasság által?
3. Hogyan számítható ki a négyzet és a rombusz területe az átlók segítségével?

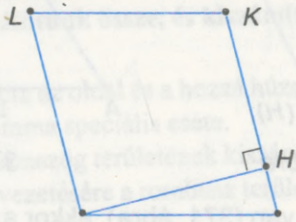
OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

721'. A 373–375. ábrák adatai alapján állapítsátok meg, helyesen vannak-e felírva a paralelogramma területének kiszámítására szolgáló képletek! A feleletet magyarázzátok meg!



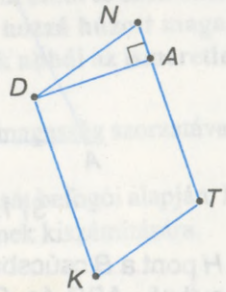
$S = AB \cdot BK$

373. ábra



$S = MN \cdot MH$

374. ábra

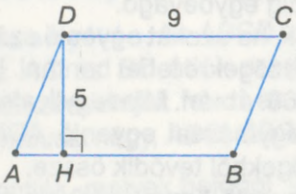


$S = DA \cdot NT$

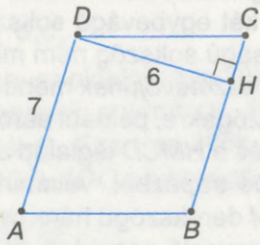
375. ábra

722'. A 376–377. ábrák adatai alapján számítsátok ki az *ABCD* paralelogramma területét!

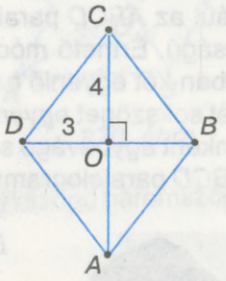
723'. Mennyi a 378. ábrán látható rombusz területe?



376. ábra



377. ábra



378. ábra

724°. Az *ABCD* paralelogrammában a *CD* oldalra *BH* magasság van állítva. Számítsátok ki a paralelogramma területét, ha:

1) $CD = 60$ cm, $BH = 50$ cm; 2) $CD = 25$ cm, $BH = 40$ cm;

3) $CD = 25$ cm, $BH = 100$ cm!

725°. A paralelogramma a oldalára h_a magasság van rajzolva. Számítsátok ki a területét, ha:

1) $a = 10$ cm, $h_a = 0{,}8a$; 2) $a = 2$ dm, $h_a = 0{,}75a$;

3) $h_a = 5$ cm, $a = 1{,}2h_a$!

726°. A paralelogramma területe S, egyik oldala a. Számítsátok ki az a oldalra bocsátott magasságot, ha:
1) $S = 60\ cm^2$, $a = 15\ cm$; 2) $S = 175\ cm^2$, $a = 35\ cm$;
3) $S = 75\ cm^2$, $a = 25\ cm$!

727°. Határozzátok meg a paralelogramma magasságát, melynek oldalai a és b, területe S. Rajzoljátok át a munkafüzetbe a 24. táblázatot, és töltsétek ki!

24. táblázat

a	5 cm	8,5 cm	14 cm	16 cm
b	10 cm	17 cm	21 cm	10 cm
S	41 cm^2	34 cm^2	63 cm^2	64 cm^2
h_a				
h_b				

728°. A paralelogramma területe S, oldalhosszúságuk pedig d. Határozzátok meg az oldalak közötti távolságot, ha:
1) $S = 56\ cm^2$, $d = 7\ cm$; 2) $S = 90\ cm^2$, $d = 18\ cm$;
3) $S = 24\ cm^2$, $d = 6\ cm$!

729°. A paralelogramma oldalai a és b, az a oldalra bocsátott magasság h. Határozzátok meg a b oldalra bocsátott magasságot, ha:
1) $a = 6\ cm$, $b = 3{,}6\ cm$, $h = 2{,}4\ cm$; 2) $a = 18\ mm$, $b = 9\ mm$, $h = 6\ mm$;
3) $a = 30\ cm$, $b = 50\ cm$, $h = 25\ cm$!

730°. Bizonyítsátok be, hogy a paralelogrammát az átlók négy egyenlő területű háromszögre bontják!

731°. A paralelogrammában az átlók metszéspontján keresztül rajzolt tetszőleges egyenes egyenlő területű részekre bontja-e a paralelogrammát?

732°. Számítsátok ki a rombusz területét, ha átlói:
1) 12 cm és 16 cm; 2) 1,6 dm és 3 dm; 3) 40 mm és 42 mm!

733°. Bizonyítsátok be, hogy az átlók a rombuszt négy egyenlő területű derékszögű háromszögre bontják!

734°. Az $ABCD$ rombusz átlóinak metszéspontja O. Az AOB derékszögű háromszög területe S. Határozzátok meg a rombusz területét, ha:
1) $S = 25\ cm^2$; 2) $S = 30\ cm^2$; 3) $S = 18\ cm^2$!

735°. Határozzátok meg az $ABCD$ négyzet területét, ha AC átlója egyenlő:
1) 4 cm; 2) 0,3 dm; 3) 1,2 m!

736. Az a és b oldalú paralelogramma hegyesszöge 30°. Határozzátok meg a paralelogramma területét, ha:
1) $a = 15\ cm$, $b = 10\ cm$; 2) $a = 25\ cm$, $b = 20\ cm$!

737. Az a és b oldalú paralelogrammában a nagyobbik oldalra bocsátott magasság a kisebbik oldallal 30°-os szöget alkot. Határozzátok meg a paralelogramma területét, ha:
1) $a = 10$ mm, $b = 15$ mm; 2) $a = 20$ mm, $b = 25$ mm!

738. A rombusz tompaszöge 150°-os. Határozzátok meg területét, ha oldala egyenlő:
1) 1 dm; 2) 2,6 cm!

739. Két egymást metsző, m és n szélességű sáv olyan paralelogrammát alkot, melynek területe S. Számítsátok ki a paralelogramma oldalait, ha:
1) $m = 9$ cm, $n = 24$ cm, $S = 72$ cm^2; 2) $m = 4$ dm, $n = 1$ dm, $S = 6$ dm^2!

740. A paralelogramma területe S. A távolság az átlók metszéspontja és az oldalak között m és n. Határozzátok meg a paralelogramma kerületét, ha:
1) $S = 56$ cm^2, $m = 4$ cm, $n = 3{,}5$ cm; 2) $S = 36$ cm^2, $m = 2$ cm, $n = 3$ cm!

741. A P kerületű paralelogrammában az átlók metszéspontja m és n távolságra van az oldalaktól. Határozzátok meg a paralelogramma területét, ha:
1) $P = 64$ cm, $m = n = 4$ cm; 2) $P = 63$ cm, $m = 4$ cm, $n = 5$ cm!

742. A paralelogramma átlójának tetszőleges pontján át az oldalakkal párhuzamosan két egyenes van húzva. Bizonyítsátok be, hogy az átló ellentétes oldalán levő két négyszög területe egyenlő!

743. A rombusz területe 36 cm^2. Határozzátok meg az átlóit, ha azok úgy aránylanak egymáshoz, mint:
1) 3 : 4; 2) 2 : 3; 3) 1 : 1!

744. Két négyzet átlója megfelelően 5 cm és 3 cm. Számítsátok ki annak a négyzetnek az átlóját, melynek területe a két négyzet területének különbségével egyenlő!

745. A rombusz területe kétszer kisebb az ugyanolyan kerületű négyzet területénél. Határozzátok meg a rombusz hegyesszögét!

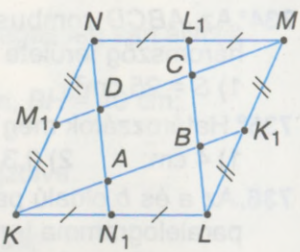
746. Hányszor kisebb a körbe írt négyzet területe, az ugyanezen kör köré írt négyzet területénél?

747*. A paralelogramma magasságai úgy aránylanak, mint 2 : 3, kerülete 40 cm, hegyesszöge pedig 30°. Számítsátok ki a paralelogramma területét!

748*. A rombusz magasságai közötti szög 60°. Bizonyítsátok be, hogy a rombusz területe kétszer nagyobb a rombusz adott magasságaira szerkesztett háromszög területénél!

749*. A 379. ábra adatai alapján bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ paralelogramma területe a $KLMN$ négyszög területének 0,2 része!

750*. Az $ABCD$ paralelogramma belső tartományában levő tetszőleges M pontot szakaszok kötik össze a paralelogramma csúcsaival. Bizonyítsátok be, hogy az AMD és BMC háromszögek területének összege egyenlő az AMB és CMD háromszögek területének összegével!



379. ábra

751* A paralelogramma átlója merőleges az oldalára. Milyen esetben egyenlő a paralelogramma területe ennek az átlónak a négyzetével?

752* A rombuszba írt kör sugara az oldalakat m és n hosszúságú szakaszokra osztja. Határozzátok meg a rombusz területét, ha:
1) $m = 1{,}8$ cm, $n = 3{,}2$ cm; 2) $m = 4$ cm, $n = 9$ cm!

753* Határozzátok meg a közös oldalú paralelogrammák csúcsainak mértani helyét, melyek területe egyenlő az adott paralelogramma területével!

754* A paralelogramma mindegyik oldalán egy pont van felvéve. A négyszög területe, melynek csúcsai az adott pontokban vannak, egyenlő a paralelogramma területének felével. Bizonyítsátok be, hogy a négyszög átlói közül legalább egy párhuzamos a paralelogramma oldalával!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

755. Egy paralelogramma alakú mező oldala 250 m, és erre az oldalra bocsátott magassága 100 m. A mezőt az oldalára merőlegesen 5 m széles szekérút szeli át. Mekkora terület vethető be?

756. Egy paralelogramma alakú földrészleget három egyenlő részre kell osztani. Hogyan húzzuk meg a határvonalakat?

757. A téglalap alakú keretet paralelogramma alakúra deformálták, melynek oldalai azonosak a téglalap oldalaival. Egyenlő lesz-e a két alakzat területe?

758. Végezzétek el a szükséges méréseket és számítsátok ki, hány darab 33 × 33 cm méretű járólap szükséges otthoni folyosótok burkolására „átló szerinti" lerakással, amikor a járólap szélei nem párhuzamosak a falakkal!

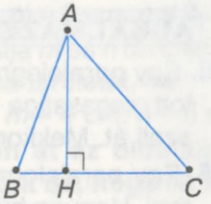




18. §. A HÁROMSZÖG TERÜLETE

A derékszögű háromszög területének kiszámítását a befogók alapján már ismeritek. Megtanuljuk, hogyan határozható meg egy tetszőleges háromszög területe egy oldal, és erre az oldalra bocsátott magasság segítségével.

Tantétel (a háromszög területéről).
A háromszög területe egy oldal, és erre az oldalra bocsátott magasság szorzatának felével egyenlő.

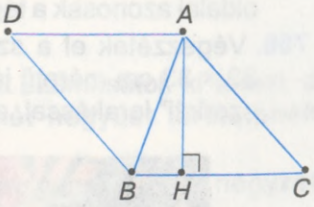


380. ábra

Adva: $ABC\Delta$ (380. ábra).
AH magasság, $BC = a$, $AH = h_a$.

Bebizonyítani: $S_{ABC\Delta} = \frac{1}{2} ah_a$.

Bizonyítás. Az $ABC\Delta$ AB oldalára vele egybevágó BAD háromszöget szerkesztünk (381. ábra). A kapott $ADBC$ négyszög paralelogramma, mert $AD = BC$, $BD = AC$ a szerkesztés szerint. A paralelogramma oldala $BC = a$, magassága $AH = h_a$. Ezért $S_{ADBC} = ah_a$. Mivel a paralelogramma két egybevágó ABC és BAD háromszögből tevődik össze, ezért az ABC háromszög területe az $ADBC$ paralelogramma területének felével egyenlő.



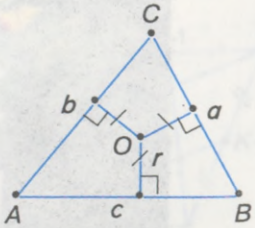
381. ábra

Kapjuk tehát: $S_{ABC\Delta} = \frac{1}{2} S_{ADBC} = \frac{1}{2} ah_a$.

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög területe a beírt kör sugara és a félkerület szorzatával egyenlő!

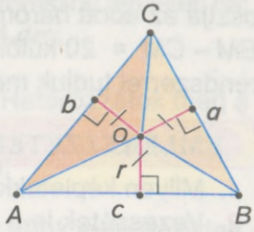
Megoldás. Legyen ABC az adott háromszög (382. ábra), melyben $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ a félkerület, az O pont a beírt kör középpontja, r a beírt kör sugara.

Bebizonyítjuk, hogy $S_{ABC\Delta} = pr$.



382. ábra

Összekötjük szakaszokkal a háromszög csúcsait a beírt kör középpontjával (383. ábra). Keletkezett három, *BOC*, *AOC* és *AOB* háromszög. Mindegyik háromszögben a beírt kör *r* sugara az *a*, *b* és *c* oldalakra bocsátott magasság.



383. ábra

Ezért $S_{BOC\Delta} = \frac{1}{2}ar$, $S_{AOC\Delta} = \frac{1}{2}br$, $S_{AOB\Delta} = \frac{1}{2}cr$.

Az *ABC* háromszög területe a három háromszög területének összegével egyenlő.

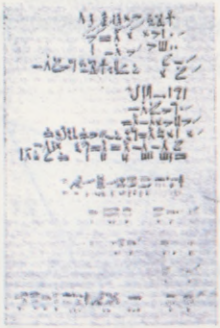
Tehát $S_{ABC\Delta} = S_{BOC\Delta} + S_{AOC\Delta} + S_{AOB\Delta} = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r = pr$.

A háromszög (négyszög) területének kiszámításakor alkalmazható részei területe összeadásának módszere. A módszer alkalmazásakor néha segédszerkesztéseket kell végezni, hogy olyan háromszögeket kapjunk, melyek területét a feladat feltételei alapján ki tudjuk számítani.

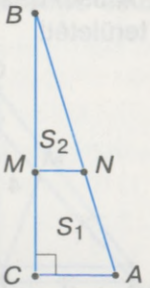
TUDJATOK TÖBBET!

1. A háromszög (a téglalap és a trapéz) területének kiszámítását már az ókori Egyiptomban is ismerték. Erről fennmaradt papirusztekercsek tanúskodnak. Legismertebb a Rhind-papirusz (i. e. 1800 tájáról), amely 84 feladatot tartalmaz megoldásokkal (részletét a 384. ábra mutatja), valamint az úgynevezett moszkvai papirusz (i. e. 1600), amely 25 feladatot és azok megoldását tartalmazza. A háromszög területének kiszámítása céljából az ókori egyiptomiak a háromszög alapját felére osztották, és megszorozták a magassággal. Az egyenlő szárú háromszög területének kiszámításakor a szárak félszorzatát használták.

2. A pontos képletekkel való mértani számítások már az ősi Babilonban ismeretesek voltak. Ezt ékírásos táblák bizonyítják (ékírásos tábla részletét láthatjátok a 385. ábrán). A ránk maradt szövegekből tudjuk, hogy a babiloniak ismerték és használták a gyakorlatban a párhuzamos szakaszok arányosságát. Például ki tudták számítani az *MN*, *CM* és *BM* szakaszok hosszát (386. ábra) az *ABC* háromszögben az $AC = 30$ oldal, a trapéz és a háromszög, melyre az *MN* egyenes


384. ábra


385. ábra



386. ábra

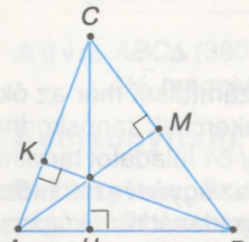
osztja az adott háromszöget területének $S_1 - S_2 = 42$ különbsége, valamint a $BM - CM = 20$ különbség alapján. Ezt a feladatot napjainkban csak egyenletrendszerrel tudjuk megoldani.

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

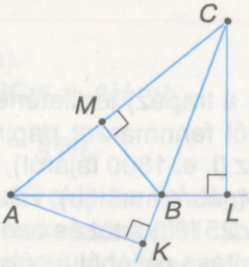
1. Milyen képletekkel számítható ki a háromszög területe?
2. Vezessétek le a háromszög területének kiszámítására szolgáló képletet a háromszög egy oldala, és a hozzá tartozó magasság alapján!
3. Mondjátok el, hogyan számítható ki a háromszög területe részeinek területe alapján! Hozzatok fel példát!

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

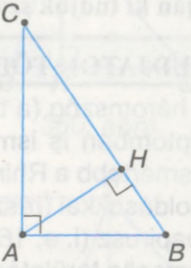
759. A 387–389. ábrák adatai alapján soroljátok fel a háromszögek oldalait a hozzájuk tartozó magasságokkal együtt!



387. ábra



388. ábra



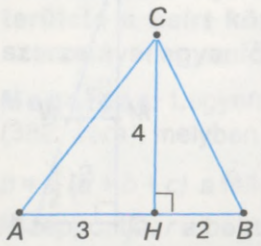
389. ábra

760. Helyesen fejezik-e ki a háromszögek területét a kijelölt egyenlőségek?

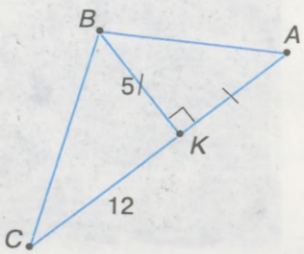
1) $S_{ABC\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot AM$ (387. ábra);
2) $S_{ABC\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$ (387. ábra);
3) $S_{ABC\Delta} = \frac{1}{2} BM \cdot AK$ (388. ábra);
4) $S_{ABC\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot CL$ (388. ábra);
5) $S_{ABC\Delta} = AB \cdot AC$ (389. ábra);
6) $S_{ABC\Delta} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$ (389. ábra).

Válaszaitokat indokoljátok meg!

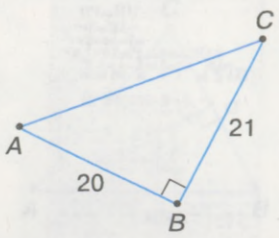
761. A 390–392. ábrák adatai alapján határozzátok meg az ABC háromszög területét!



390. ábra



391. ábra



392. ábra

762°. Az ABC háromszög magassága BH. Számítsátok ki a háromszög területét, ha:
1) $AC = 6$ cm, $BH = 5$ cm; 2) $AC = 2{,}5$ dm, $BH = 4$ dm;
3) $AC = 25$ cm, $BH = 100$ cm!

763°. A háromszög a oldalához h_a magasság van rajzolva. Határozzátok meg a háromszög területét, ha:
1) $a = 10$ cm, $h_a = 0{,}8a$; 2) $a = 2$ dm, $h_a = 0{,}75a$;
3) $h_a = 12$ mm, $a = 1{,}5h_a$!

764°. A háromszög területe S, egyik magassága h. Határozzátok meg az oldalt, melyre ezt a magasságot állították, ha:
1) $S = 72$ cm^2, $h = 12$ cm; 2) $S = 155$ cm^2, $h = 10$ cm;
3) $S = 75$ cm^2, $h = 7{,}5$ cm!

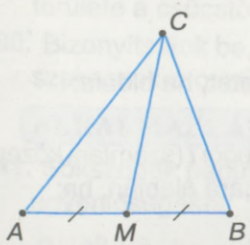
765°. Számítsátok ki a háromszög magasságát, melynek területe S, oldalai pedig a, b és c. Rajzoljátok le a munkafüzetbe a 25. táblázatot, és töltsétek ki!

25. táblázat

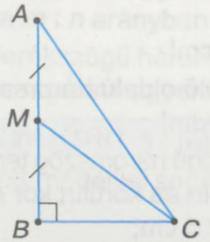
a	13 cm	13 cm	7 cm	9 cm
b	14 cm	20 cm	15 cm	10 cm
c	15 cm	21 cm	20 cm	17 cm
S	84 cm^2	126 cm^2	42 cm^2	36 cm^2
h_a				
h_b				
h_c				

766°. Hogyan változik a háromszög területe, ha:
1) egyik oldalát kétszeresére növeljük, a hozzá tartozó magasságot felére csökkentjük;
2) egyik oldalát kétszeresére kisebbítjük, a hozzá tartozó magasságot négyszeresére növeljük;
3) egyik oldalát négyszeresére növeljük, a hozzá tartozó magasságot felére csökkentjük?

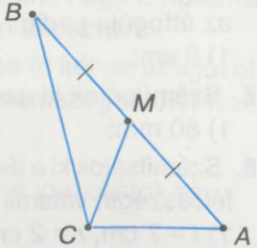
767°. A 393–395. ábrák adatai alapján bizonyítsátok be, hogy az AMC és BMC háromszögek egyenlő területűek!



393. ábra



394. ábra



395. ábra

768°. Milyen arányban osztja a súlyvonal a háromszög területét? A feleletet indokoljátok meg!

769°. A háromszögben megrajzolták a középvonalat. Az adott háromszög területének hányad része a keletkezett háromszög területe?

770°. A háromszög középvonala S területű háromszöget metsz ki belőle. Mennyi az adott háromszög területe, ha:
1) $S = 52{,}5\ \text{cm}^2$; 2) $S = 21\ \text{cm}^2$; 3) $S = 105\ \text{cm}^2$?

771°. A háromszög területe S, oldalai a, b és c, a beírt kör sugara pedig r. Rajzoljátok át a munkafüzetbe a 26. táblázatot, és töltsétek ki!

26. táblázat

a	17 cm	13 cm	7 cm	13 cm
b	28 cm	20 cm	15 cm	37 cm
c	39 cm	21 cm	20 cm	40 cm
p				
r	5 cm	$\frac{14}{3}$ cm	2 cm	$\frac{16}{3}$ cm
S				

772. A háromszög középvonala q, a rá merőleges magasság h. Határozzátok meg a háromszög területét, ha:
1) $q + h = 12{,}5$ cm, $q - h = 0{,}5$ cm; 2) $q + h = 23$ cm, $h - q = 17$ cm!

773. Bizonyítsátok be, hogy két háromszög területe egyenlő, ha középvonalaik, valamint a középvonalakra merőleges magasságok megfelelően egyenlők!

774. A derékszögű háromszög területe S, befogóinak aránya $m : n$. Számítsátok ki a befogókat, ha:
1) $S = 720\ \text{cm}^2$, $m = 9$, $n = 40$; 2) $S = 1320\ \text{cm}^2$, $m = 11$, $n = 9{,}6$!

775. Határozzátok meg a derékszögű háromszög területét, ha a magasság az alábbi szakaszokra osztja az átfogót:
1) 4 cm és 9 cm; 2) 1 cm és 16 cm!

776. Számítsátok ki a derékszögű háromszög területét, ha hegyesszöge 30°, az átfogója pedig:
1) 8 cm; 2) 12 cm!

777. Számítsátok ki az egyenlő oldalú háromszög területét, ha oldala:
1) 80 mm; 2) 1,2 dm!

778. Számítsátok ki a derékszögű háromszög területét befogói t (számtani közepe) félösszege, valamint a beírt és körülírt kör r és R sugara alapján, ha:
1) $t = 7$ cm, $r = 2$ cm, $R = 5$ cm;
2) $t = 17$ cm, $r = 4$ cm, $R = 13$ cm!

779. A háromszög oldalai a, b és c, és emellett $a < b < c$. Állítsatok fel egyenlőtlenséget a h_a, h_b, és h_c magasságokra. A megoldáshoz fűzzetek magyarázatot!

780. Ismert két hasonló háromszög egyikének területe. Milyen méréseket és számításokat kell elvégezni, hogy megkapjuk a másik háromszög területét?

781. **Bizonyítsátok be, hogy a háromszög területe, melynek csúcsa egy adott háromszög súlyvonalainak metszéspontjában van, egy oldala pedig közös az adott háromszög oldalával, az adott háromszög területének egyharmadával egyenlő!**

782. Az $ABCD$ paralelogrammában a D csúcs 4 cm távolságra van a 16 cm hosszúságú AC átlótól. $AB = 12$ cm. Határozzátok meg:
1) a D pont és az AB egyenes;
2) az AB és CD egyenesek;
3) az átló közepe és a paralelogramma CD oldala közötti távolságot!

783.* **Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő oldalú háromszög belső tartományában fekvő tetszőleges pont távolságainak összege a háromszög oldalaitól egyenlő a háromszög magasságával!**

784.* Határozzátok meg a közös oldalú háromszögek csúcsainak mértani helyét, melyek területe az adott háromszög területével egyenlő!

785.* Bizonyítsátok be, hogy a háromszögben, melynek magasságai h_a, h_b, és h_c, a beírt kör sugara pedig r, fennáll az egyenlőség: $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$!

786.* Az ABC háromszög AB oldalát az A ponton túl nagyságának $\frac{1}{2}$ részével meghosszabbították. Kaptak egy D pontot. Mekkora a területe a kapott DAC háromszögnek?

787.* A háromszög oldalait (az óramutató mozgásának irányába) meghosszabbították saját hosszukkal. A kapott pontokat szakaszokkal kötötték össze. Határozzátok meg a kapott háromszög területét!

788.* A csúcstól számítva milyen arányban kell felosztani a háromszög oldalát az alappal párhuzamos két egyenessel, hogy a háromszög három egyenlő területű részre legyen osztva?

789.* A háromszög magassága 4 cm. A csúcstól mekkora távolságra kell a szemben fekvő oldallal párhuzamos egyenest rajzolni, hogy a háromszög területe a csúcstól számítva $m : n$ arányban legyen felosztva?

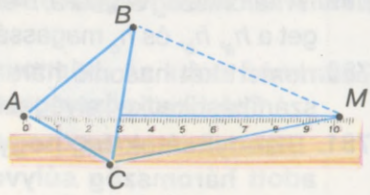
790.* Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű háromszögbe írt kör az átfogót olyan szakaszokra osztja, melyek szorzata egyenlő a háromszög területével!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

791. Sokszögek papírból kivágott modelljei segítségével igazoljátok az egyenlőségeket:

$$S=\frac{ah}{2}=\frac{a}{2}\cdot h=a\cdot\frac{h}{2}.$$

792. A háromszög területe meghatározható vonalzóval. E célból a vonalzót úgy kell az *ABC* háromszöghöz illeszteni, amint a 396. ábra mutatja, és a *B* ponton keresztül meghúzni *BM* || *AC*. Magyarázzátok meg, hogyan kapjuk a terület keresett nagyságát, ismerve a vonalzó szélességét és az *AM* szakasz hosszát!



396. ábra

793. Hogyan kell a vonalzó beosztásait megrajzolni (396. ábra), hogy az *M* pont közvetlenül az *ABC*Δ területét mutassa?

794. Háromszög alakú alkatrészeket gyártottak, melyek legnagyobb oldala azonos, valamint azonosak a távolságok a szemközti csúcs és az oldal között. Adjátok meg a konténer formáját és méreteit, melyben a legalkalmasabb ezeket az alkatrészeket szállítani!

795. A levegő nyomása minden négyzetcentiméterre 1,03 kg. Milyen nyomás nehezedik az ablak fölötti háromszög alakú napellenzőre, ha szélessége 1,8 m, a szemben fekvő csúcs távolsága pedig ettől az oldaltól 0,5 m?

796. A háromszög alakú rétet két egyenlő területű részre kell osztani. Hogyan oldható ez meg jelzőpózna és terepkörző segítségével?

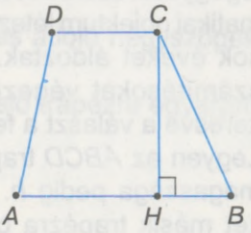




19. § A TRAPÉZ TERÜLETE

A téglalap, a paralelogramma, a háromszög területének kiszámítása céljából az alakzatokat olyan alakzatokká kell átalakítani, melyek területét ki tudjuk számítani. Alkalmazzuk ezt az eljárást a trapéz területének kiszámítására.

Tantétel (a trapéz területéről).
A trapéz területe az alapok számtani közepének és magasságának szorzatával egyenlő.

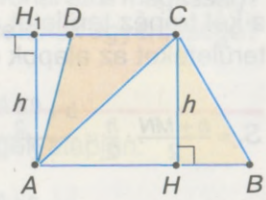


397. ábra

Adva: $ABCD$ trapéz (397. ábra).
AB és CD alapok, CH magasság,
$AB = a$, $CD = b$, $CH = h$.

Bebizonyítani: $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Bizonyítás. Meghúzzuk a trapéz AC átlóját (398. ábra). Az átló a trapézt ABC és ADC háromszögekre osztja. A trapéz h magassága az ABC háromszög $AB = a$, valamint az ADC háromszög $CD = b$ oldalára bocsátott magassága.
A trapéz területe ezen háromszögek területének összegével egyenlő, ezért

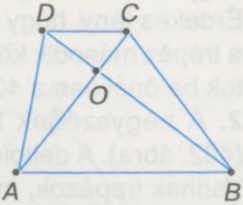


398. ábra

$$S_{ABCD} = S_{ABC\Delta} + S_{ADC\Delta} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Feladat. Az $ABCD$ trapéz AC és BD átlói az O pontban metszik egymást (399. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az AOD és BOC háromszögek egyenlő területűek!

Megoldás. Megvizsgáljuk az ABD és ABC háromszögeket. Bennük az AB oldal közös, az erre az oldalra húzott magasság egyenlő a trapéz magasságával.
Ezért $S_{ABD\Delta} = S_{ABC\Delta}$.
Az ABD háromszög az AOD és AOB háromszögekből tevődik össze, az ABC háromszög pedig az AOB és BOC háromszögekből.
Innen kapjuk:
$S_{AOD\Delta} = S_{ABD\Delta} - S_{AOB\Delta}$; $S_{BOC\Delta} = S_{ABC\Delta} - S_{AOB\Delta}$.



399. ábra

Tehát az AOD és BOC háromszögek területe egyenlő, mivel egyenlő területek különbségei.

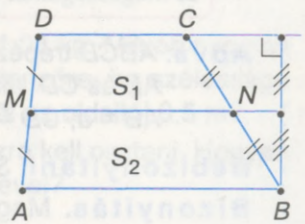
Annak megállapítására, hogy két nem egybevágó alakzat egyenlő területű, be kell bizonyítani, hogy az alakzatok területei: a) vagy egyenlő területű alakzatok összegével; b) vagy különbségével egyenlők.

TUDJATOK TÖBBET!

1. Felmerülhet a kérdés: *létezik-e olyan trapéz, melynek középvonala két egyenlő részre osztja a területét?*

Általában az adott tulajdonságokkal rendelkező alakzatok létezésének kérdése ilyen alakzat példájának említésével oldható meg. Ugyanakkor nem mindig ez a legegyszerűbb út. A történelemből ismerünk példákat, amikor valamilyen matematikai objektum létezésének alátámasztására szolgáló példa keresésére a tudósok éveket áldoztak. A keresés leegyszerűsítése céljából előzetes elemző számításokat végeznek. Most mi is ezt tesszük, keresve a választ a feltett kérdésre.

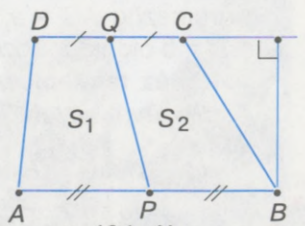
Legyen az *ABCD* trapéz (400. ábra) alapja *a* és *b*, magassága pedig *h*. Az *MN* középvonal a trapézt két másik trapézra osztja, melyek mindegyikének magassága $\frac{h}{2}$ (bizonyítsátok be önállóan). Jelöljük a két trapéz területét S_1-gyel és S_2-vel, kifejezzük a területeket az alapok és a magasság segítségével:



400. ábra

$$S_1 = \frac{b + MN}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{b + \frac{a+b}{2}}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3b + a}{4} \cdot \frac{h}{2},$$

$$S_2 = \frac{a + MN}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3a + b}{4} \cdot \frac{h}{2}.$$



401. ábra

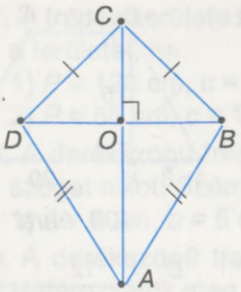
Meghatározzuk az S_1 és S_2 területek arányát.

Az egyszerűsítés után kapjuk: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3b + a}{3a + b}$.

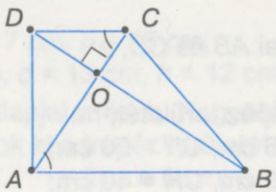
Az S_1 és S_2 területek egyenlősége csak akkor lehetséges, ha $3b + a = 3a + b$, vagyis ha $a = b$. Ilyen trapéz viszont nincs.

Érdekes tény, hogy a trapéz alapjainak középpontját összekötő szakasz (néha a trapéz második középvonalának nevezik) felezi a trapéz területét. Bizonyítsátok be önállóan a 401. ábra felhasználásával!

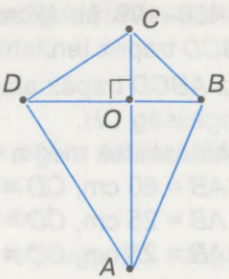
2. A négyszögek tanulmányozása során megismerkedtetek a deltoiddal (402. ábra). A deltoid átlói – akárcsak a rombusz átlói – merőlegesek egymásra. Vannak trapézok, melyek átlói ugyancsak merőlegesek egymásra (403. ábra), valamint ilyen tulajdonságú tetszőleges négyszögek is (404. ábra). A rombusz, a deltoid, az említett trapézok a kölcsönösen merőleges átlójú négyszögek külön fajtái.



402. ábra



403. ábra



404. ábra

Bizonyítsátok be önállóan, hogy a kölcsönösen merőleges átlójú négyszögek területe az átlók szorzatának felével egyenlő!
Ez a meghatározás a rombuszra, a deltoidra és a megfelelő trapézra egyaránt érvényes.

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Milyen képlettel számítható ki a trapéz területe? Hogyan vezethető le a képlet?
2. Hogyan számítható ki a trapéz területe, ha ismert a középvonal és a magasság?
3. Hogyan bizonyítható be két nem egybevágó alakzat területének egyenlősége?

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

797'. Kiszámítható-e a trapéz területe az adott egyenlőségek alapján:

1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot DH$ (405. ábra);

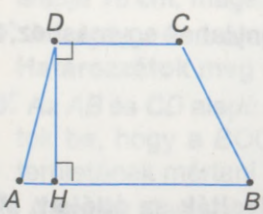
2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB + DC \cdot BH$ (405. ábra);

3) $S_{KLMN} = \frac{1}{2} (KL + NM) \cdot TL$ (406. ábra);

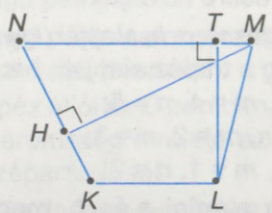
4) $S_{KLMN} = (KN + LM) \cdot \frac{MH}{2}$ (406. ábra);

5) $S_{PQHT} = PQ \cdot PT$ (407. ábra);

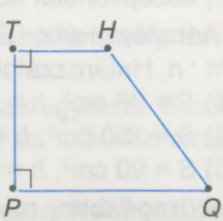
6) $S_{PQHT} = \frac{HT + PQ}{2} \cdot PT$ (407. ábra)? A válaszokat indokoljátok meg!



405. ábra

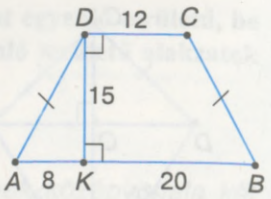


406. ábra



407. ábra

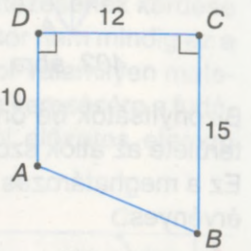
798'. A 408–409. ábrák adatai alapján számítsátok ki az *ABCD* trapéz területét!



408. ábra

799°. Az *ABCD* trapéz alapjai *AB* és *CD*, a magasság *CH*.
Határozzátok meg a trapéz területét, ha:
1) $AB = 60$ cm, $CD = 36$ cm, $CH = 50$ cm;
2) $AB = 25$ cm, $CD = 45$ cm, $CH = 40$ cm;
3) $AB = 25$ cm, $CD = 55$ cm, $CH = 100$ cm!

800°. A trapéz alapjai a és b, magassága h.
Számítsátok ki a trapéz területét, ha:
1) $a = 10$ cm, $b = 0{,}8a$, $h = a$;
2) $a = 2$ dm, $b = 0{,}75a$, $h = 0{,}5a$;
3) $b = 5$ cm, $a = 1{,}2b$, $h = a$!



409. ábra

801°. A trapéz területe S, magassága h. Határozzátok meg a trapéz alapjainak összegét, ha:
1) $S = 60$ cm^2, $h = 12$ cm; 2) $S = 150$ cm^2, $h = 25$ cm;
3) $S = 90$ cm^2, $h = 15$ cm!

802°. A trapéz területe S, középvonala q. Számítsátok ki a magasságát, ha:
1) $S = 60$ cm^2, $q = 15$ cm; 2) $S = 175$ cm^2, $q = 35$ cm; 3) $S = 75$ cm^2, $q = 25$ cm!

803°. A trapéz alapjai a és b, középvonala q, magassága h, területe S. Rajzoljátok át a munkafüzetbe a 27. táblázatot, és töltsétek ki!

27. táblázat

a	10 cm	23 cm		
b	14 cm		22 cm	9 cm
q		25 cm		16 cm
h	7 cm		10 cm	
S		125 cm^2	210 cm^2	176 cm^2

804°. Hogyan változik a trapéz területe, ha:
1) mindkét alapját kétszeresére növeljük, magasságát felére csökkentjük;
2) mindkét alapját felére csökkentjük, magasságát kétszeresére növeljük;
3) középvonalát kétszeresére növeljük?

805°. A trapéz területe S, magassága h, alapjai úgy aránylanak egymáshoz, mint $m : n$. Határozzátok meg a trapéz alapjait, ha:
1) $S = 36$ cm^2, $h = 2$ cm, $m = 4$, $n = 5$;
2) $S = 150$ cm^2, $h = 5$ cm, $m = 2$, $n = 3$;
3) $S = 90$ cm^2, $h = 6$ cm, $m = 1$, $n = 2$!

806°. A trapézban, melynek alapjai a és b, megrajzolták az átlókat. Mivel egyenlő az alapokra illeszkedő háromszögek területének aránya?

807. A trapéz kerülete P, szárai c és d, magassága pedig h. Határozzátok meg a területét, ha:
1) $P = 120$ cm, $c = d = 17$ cm, $h = 15$ cm;
2) $P = 58$ cm, $c = 15$ cm, $d = 13$ cm, $h = 12$ cm!

808. A derékszögű trapéz alapjai a és b. Nagyobbik szára az alappal 45°-os szöget alkot. Számítsátok ki a trapéz területét, ha:
1) $a = 2$ cm, $b = 5$ cm; 2) $a = 5$ cm, $b = 3$ cm!

809. A derékszögű trapéz két legkisebb oldala a, legnagyobb szöge 135°. Határozzátok meg a területét, ha:
1) $a = 2$ cm; 2) $a = 3$ cm!

810. Az egyenlő szárú trapéz alapjai a és $3a$, területe $2a^2$. Mivel egyenlő a trapéz hegyesszöge?

811. A trapéz d kisebbik átlója merőleges az a és b alapokra. Határozzátok meg a trapéz területét, ha:
1) $a + 2b = 3{,}3$ cm, $a - b = 1{,}8$ cm, $d = 4$ cm;
2) $3a + 2b = 44$ cm, $a - 2b = 4$ cm, $d = 12$ cm!

812. A trapéz tompaszögének csúcsából a szárral párhuzamosan húzott szakasz az alapot 1 : 2 arányban osztja. Határozzátok meg a trapéz alapjait, ha a keletkezett háromszög területe 6 cm^2, a trapéz magassága pedig 3 cm! Hány esetet kell megvizsgálni?

813. A trapéz kisebbik alapja 4 cm. Az a egyenes a trapézt paralelogrammára és háromszögre bontja, melyek egyenlő területűek. Számítsátok ki a trapéz nagyobbik alapját!

814. **Bizonyítsátok be, hogy a kör köré írt trapéz területe szárai félösszegének a magassággal való szorzata!**

815. A kör köré írt trapéz kerülete P, területe pedig S. Határozzátok meg a kör sugarát!

816. A trapéz átlói kölcsönösen merőlegesek egymásra. Az egyik átló hossza 8 cm, a trapéz területe pedig 40 cm^2. Határozzátok meg a másik átlót!

817.* **Bizonyítsátok be, hogy számtalan nem egybevágó trapéz létezik, melyeknek az *ABCD* trapézzal közös a középvonala és egyenlő a területe!**

818.* Milyen értékhatárok között változhat a trapéz területe, melynek nagyobbik alapja 16 cm, magassága pedig 2 cm?

819.* **A trapéz *a* és *b* alapjával párhuzamos szakasz felezi a trapéz területét. Határozzátok meg a szakasz hosszát!**

820.* Az AB és CD alapú trapéz átlói az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy a BOC háromszög területe az AOB és COD háromszögek területének mértani középarányosa!

821.* A trapéz alapjai úgy aránylanak egymáshoz, mint $m : n$. Határozzátok meg a négy rész területének arányát, melyre az átlók osztják a trapézt!

822*. Az egyenlő szárú trapéz magassága h, területe h^2. Milyen szög alatt metszik egymást a trapéz átlói?

823*. Határozzátok meg az egyenlő szárú trapéz területét, ha a szár hossza c, a szárra merőleges átló d, az alapok pedig úgy aránylanak egymáshoz, mint 3 : 5!

824*. A kölcsönösen merőleges átlójú trapézban az alapok felezőpontját összekötő szakasz hossza a középvonallal egyenlő. Bizonyítsátok be!

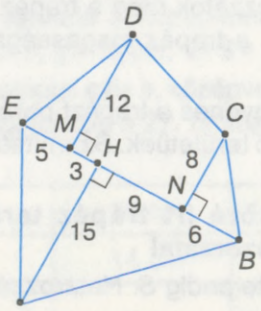
825*. Ha a trapéz szárának felezőpontját összekötjük szakaszokkal a másik szár végpontjaival, akkor a keletkezett háromszög területe kétszer kisebb a trapéz területénél. Bizonyítsátok be!

826*. A háromszögben a súlyvonalak metszéspontján át három szakasz van rajzolva, melyek mindegyike párhuzamos a háromszög valamelyik oldalával. Bizonyítsátok be, hogy a keletkezett három trapéz területe egyenlő!

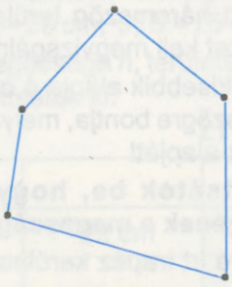
ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

827°. A 410. ábrán egy földrészleg tervrajza látható 1:1000 méretarányban. Mekkora a részleg területe?

828°. Hogyan határozható meg a 411. ábrán látható földrészleg területe, ha a méretarány 1:1000?



410. ábra



411. ábra

829. Egy földrészleg derékszögű trapéz alakú. Hogyan rajzolható olyan merőleges az alapra, amely két egyenlő területű részre osztja a földrészleget?

830. A lámpa üvegbetétjei trapéz alakúak, melynek párhuzamos oldalai 20 cm és 16 cm hosszúak, a távolság közöttük 10 cm. Elegendő-e egy 30 × 24 cm méretű téglalap alakú üveglap 4 ilyen betét kivágására?
A feleletet magyarázzátok meg!



ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mi a sokszög; n-szög? Hogyan jelölik a sokszögeket?
2. Milyen elemei vannak a sokszögnek? Mi a sokszög külső szöge?
3. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a sokszög szögeinek összegéről szóló tantételt!
4. Milyen sokszöget nevezünk körbe írt sokszögnek? Kör köré írt sokszögnek?
5. Mi az alakzat területe? Nevezzétek meg a terület alaptulajdonságait!
6. Vezessétek le a téglalap, a paralelogramma, a háromszög, a trapéz területének képletét! Milyen képlettel számítható ki a négyzet területe?
7. Mivel egyenlő a hasonló háromszögek területének aránya?

TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvassátok el a feladatokat, és válasszátok ki az egyetlen helyes feleletet! A tesztfeladat elvégzésére 10–15 perc gondolkodási idő szükséges.

1° A hatszög szögeinek összege:

A. 60°. **B.** 120°. **C.** 540°. **D.** 720°.

2° A négyzet és a téglalap egyenlő területű. A négyzet kerülete 24 cm, a téglalap egyik oldala 4 cm. A másik oldal:

A. 6 cm. **B.** 9 cm. **C.** 20 cm. **D.** 36 cm.

3° Az AC alapú ABC egyenlő szárú háromszög területe 4800 cm^2, AB = 100 cm. A szárakra húzott magasság:

A. 24 cm és 48 cm. **C.** 48 cm és 96 cm.

B. 48 cm és 48 cm. **D.** 96 cm és 96 cm.

4 Az $ABCD$ trapézban a kisebbik CD alap 7 cm, a magasság pedig 8 cm. Az $ABC\Delta$ területe 60 cm^2. A trapéz területe:

A. 45 cm^2. **B.** 56 cm^2. **C.** 75 cm^2. **D.** 88 cm^2.

5* Az $ABCD$ rombusz átlói 9 cm és 40 cm. Az AC nagyobbik átlót a K pont 3 : 2 arányban osztja az A csúcstól számítva. Az AKB háromszög területe:

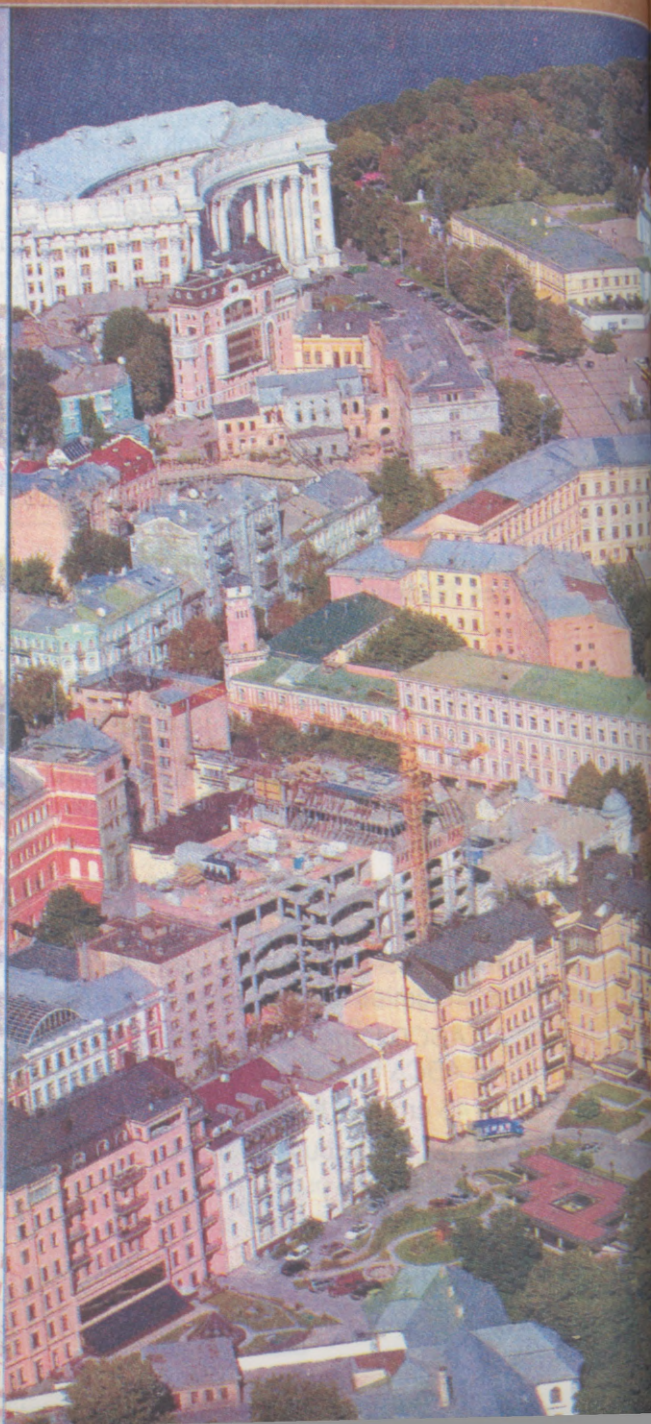
A. 90 cm^2. **B.** 135 cm^2. **C.** 180 cm^2. **D.** 270 cm^2.

4. FEJEZET

A DERÉKSZÖGŰ

A fejezetből ismereteket szereztek:

- a mértan nevezetes tételéről, Pitagorasz tételéről, valamint következményeiről;
- mi a derékszögű háromszög hegyesszögének szinusza, koszinusza, tangense, valamint az oldalak közötti kölcsönös összefüggésekről;
- a derékszögű háromszög hegyesszögei meghatározásának új algoritmusairól egy oldal és egy hegyesszög alapján, valamint két oldal alapján;
- a megismert algoritmusok alkalmazását mértani és gyakorlati tartalmú feladatok megoldásánál



HÁROMSZÖGEK MEGOLDÁSA





20. §. PITAGORASZ TÉTELE. MERŐLEGES ÉS FERDE

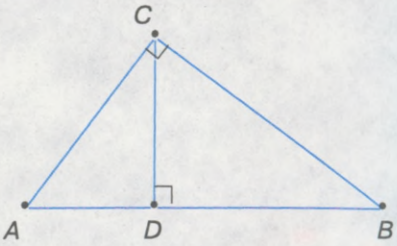
Bebizonyítunk egy tételt, melynek felfedezése egy ókori görög tudós, Püthagorasz (K. e. VI. sz.) nevéhez kötődik.

Pitagorasz tétele. A derékszögű háromszögben az átfogó négyzete egyenlő a befogók négyzetének összegével.

Adva: $ABC\Delta$, $C\angle = 90°$ (412. ábra).

Bebizonyítani: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Bizonyítás. A C derékszög csúcsából meghúzzuk a CD magasságot. A derékszögű háromszög mindegyik befogója mértani középarányosa az átfogónak, és a befogó átfogóra eső vetületének. Ezért $AC^2 = AB \cdot AD$ és $BC^2 = AB \cdot BD$. Tagonként összeadva az egyenlőségeket, és figyelembe véve, hogy $AD + DB = AB$, kapjuk: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB(AD + DB) = AB^2$. Tehát $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

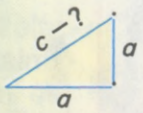
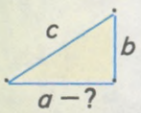
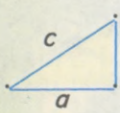


412. ábra

Ha a, b a derékszögű háromszög befogói, c az átfogója, akkor a $c^2 = a^2 + b^2$ képletből ilyen képleteket kapunk: $c = \sqrt{a^2+b^2}$ és $a^2 = c^2 - b^2$ vagy $a = \sqrt{c^2-b^2}$; $b^2 = c^2 - a^2$ vagy $b = \sqrt{c^2-a^2}$.

A fenti képletek segítségével a derékszögű háromszög bármelyik két oldalából meghatározható a harmadik oldal (28. táblázat).

28. táblázat

		
$c = \sqrt{a^2+b^2}$	$a = \sqrt{c^2-b^2}$	$b = \sqrt{c^2-a^2}$

Például:

1) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, akkor $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ (cm);

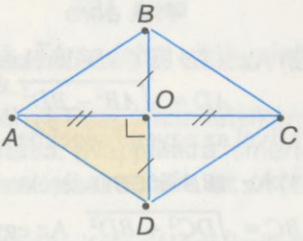
2) $c = 13$ cm, $a = 5$ cm, akkor $b = \sqrt{c^2-a^2} = \sqrt{13^2-5^2} = 12$ (cm).

Igaz a Pitagorasz-tétel megfordítása: **ha a háromszög egy oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével, akkor a háromszög derékszögű.**

A Pitagorasz-tétel megfordítása állításának értelmében az a háromszög, melynek oldalai 3 cm, 4 cm és 5 cm derékszögű, mert $3^2 + 4^2 = 5^2$. Az ilyen háromszöget *egyiptomi* háromszögnek nevezik.

Feladat. A rombusz oldala 10 cm, egyik átlója pedig 16 cm. Számítsuk ki a másik átlót!

Megoldás. Legyen az $ABCD$ rombuszban (413. ábra) $AC = 16$ cm, $AD = 10$ cm. Meghatározzuk a BD átlót. Mint ismeretes, a rombusz átlói derékszögben metszik egymást, és a metszéspont felezi mindkét átlót. Tehát az $AOD\Delta$ derékszögű ($O\angle = 90°$), befogója $AO = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8$ (cm), az átfogó $AD = 10$ cm.



413. ábra

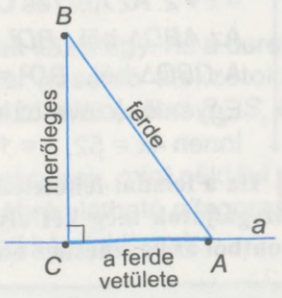
A Pitagorasz-tétel alapján $AD^2 = AO^2 + OD^2$, ahonnan $OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (cm).

Az átló, $BD = 2 \cdot OD = 2 \cdot 6 = 12$ (cm).

Egy alakzat valamely elemének (oldal, magasság, átló) meghatározása céljából az alakzat tulajdonságait felhasználva, válasszunk ki a rajzon egy derékszögű háromszöget, és alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt.

Legyen BC a B pontból az a egyenesre bocsátott merőleges (414. ábra). Válasszunk ki egy tetszőleges, a C-től különböző A pontot az a egyenesen.

Összekötjük az A és B pontokat. Az AB szakaszt a B pontból az a egyenesre húzott *ferdének* nevezzük. Az A pont a *ferde talppontja*, az AC szakasz a *ferde vetülete*.



414. ábra

A ferdék tulajdonságai.

Ha egy adott pontból az egyeneshez merőlegest és ferdét húzunk, akkor:

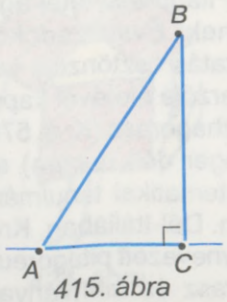
1) bármilyen ferde nagyobb a merőlegesnél;

2) egyenlő ferdék vetületei egyenlők;

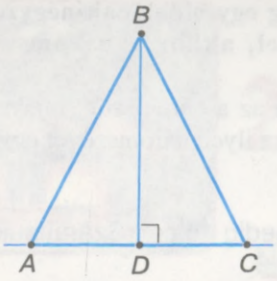
3) két ferde közül az a nagyobb, amelyiknek nagyobb a vetülete.

Bemutatjuk, hogy a ferdék tulajdonságai a Pitagorasz-tételből erednek.

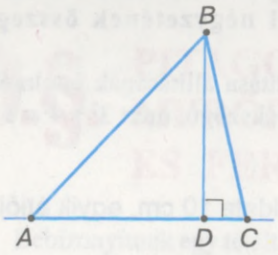
1) A Pitagorasz-tétel alapján $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (415. ábra). Akkor $AB^2 > BC^2$ vagy $AB > BC$.



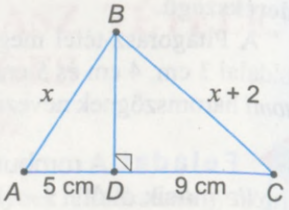
415. ábra



416. ábra



417. ábra



418. ábra

2) Az ABD és CBD derékszögű háromszögekből (416. ábra):

$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$, $DC = \sqrt{BC^2 - BD^2}$.

Mivel az egyenlőségekben $AB = BC$ (a feltétel szerint), ezért $AD = DC$.

3) Az ABD és CBD derékszögű háromszögekből (417. ábra) kapjuk: $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}$, $BC = \sqrt{DC^2 + BD^2}$. Az egyenlőségekben $AD > DC$, akkor $AB > BC$.

Feladat. Az egyeneshez egy pontból két ferdét húztunk, melyek vetülete 5 cm és 9 cm. Határozzuk meg a két ferde hosszát, ha az egyik 2 cm-rel hosszabb a másiknál!

Megoldás. Legyen: $AD = 5$ cm, $DC = 9$ cm (418. ábra). Mivel $AD < DC$, ezért a ferdék 3. tulajdonsága értelmében $AB < BC$. Jelöljük AB-t x-szel, akkor $BC = x + 2$. Az ABD és CBD derékszögű háromszögekből meghatározzuk BD^2-et.

Az $ABD\Delta$-ből : $BD^2 = AB^2 - AD^2 = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$.

A $CBD\Delta$-ből : $BD^2 = BC^2 - DC^2 = (x + 2)^2 - 9^2 = x^2 + 4x - 77$.

Egyenlővé téve az egyenletek jobb oldalát kapjuk: $x^2 + 4x - 77 = x^2 - 25$.

Innen $4x = 52$, $x = 13$ cm. Tehát $AB = 13$ cm, $BC = x + 2 = 15$ (cm).

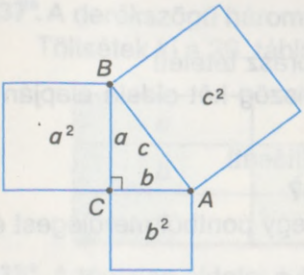
Ha a feladat feltételeiben az egyeneshez egy pontból húzott két ferde szerepel, vizsgáljatok meg két olyan derékszögű háromszöget, melyek közös befogója a pontból az egyeneshez húzott merőleges.

TUDJATOK TÖBBET!

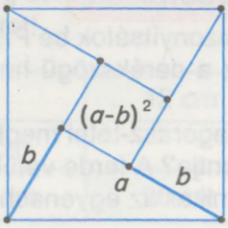
A Pitagorasz-tétel egyike a matematika nevezetes tételeinek. Évszázadokon keresztül számos matematikai kutatás ösztönzője volt. Ismerkedjetek meg a tétellel és szerzője életével kapcsolatos néhány érdekes ténnyel.

Püthagorasz (K. e. 570–496) Szamosz szigetén (az Égeitenger déli részén) született. Hosszú időn át folytatott matematikai tanulmányokat Egyiptomban és Babilóniában. Dél-Itáliában, Kroton városában iskolát alapított, az úgynevezett pitagoreusok társulatát (szövetségét). Püthagorasz és tanítványai (a pitagoreusok) matematikával,

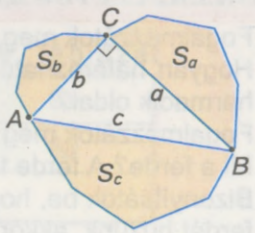

Püthagorasz



419. ábra



420. ábra



421. ábra

filozófiával, zeneelmélettel, csillagászattal foglalkoztak. Társadalmi viták miatt az iskola épületét lerombolták, Püthagoraszt megölték.

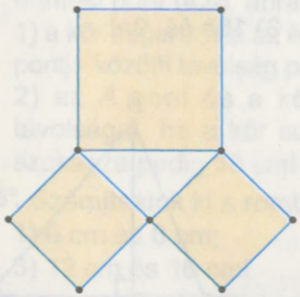
A pitagoreusok munkásságának legjelentősebb eredménye Pitagorasz-tételként ismert matematikai törvényszerűség és annak bizonyítása. (Napjainkra ismertté vált, hogy a tételt Püthagorasz előtt már 1500 évvel alkalmazták az ókori Babilóniában).

A tétel eredeti megfogalmazása: **a derékszögű háromszög átfogójára épített négyzet területe egyenlő a befogókra épített négyzetek területének összegével** (419. ábra).

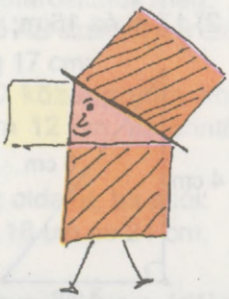
A Pitagorasz-tétel bizonyításával évszázadokon át sok matematikus foglalkozott. Jelenleg több mint 150 bizonyítása ismert a tételnek. Bhászkara indiai matematikus (XII. sz.) a 420. ábrán látható alakzatot javasolt minden magyarázat nélkül. A rajz alatt csak egy szó áll: *Nézd*. Próbáljátok a rajz alapján igazolni a tétel állítását!

Pitagorasz tétele érdekes általánosításokat vet fel. Ezek közül egy: ha a derékszögű háromszög oldalaira tetszőleges, egymással hasonló alakzatokat szerkesztünk, akkor igaz az egyenlőség: $S_c = S_a + S_b$ (421. ábra), ahol S_a, S_b és S_c a szerkesztett alakzatok területe.

Vannak Pitagorasz tételével kapcsolatos tréfás gyermekrajzok, mint például az egyenlő szárú derékszögű háromszög esetére a 422. ábrán látható *pitagoraszi nadrág*, melyet néha a 423. és 424. ábrán látható rajzokká alakítanak.



422. ábra



423. ábra



424. ábra

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be Pitagorasz tételét!
2. Hogyan határozható meg a derékszögű háromszög két oldala alapján a harmadik oldal?
3. Fogalmazzátok meg a Pitagorasz-tétel megfordítását!
4. Mi a ferde? A ferde talppontja? A ferde vetülete?
5. Bizonyítsátok be, hogy amikor az egyeneshez egy pontból merőlegest és ferdét húzunk, akkor:
   1) bármilyen ferde nagyobb a merőlegesnél;
   2) egyenlő ferdék vetületei egyenlők;
   3) két ferde közül az a nagyobb, amelyiknek nagyobb a vetülete!

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

831'. Melyik állítás igaz?
A derékszögű háromszögben:
1) az átfogó négyzete egyenlő a két befogó négyzetének különbségével;
2) az átfogó egyenlő a két befogó négyzetének összegével;
3) az átfogó négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével.

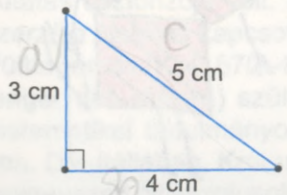
832'. Helyesen mutatja-e a 425. és 426. ábra a derékszögű háromszögek oldalainak hosszát? Indokoljátok meg a feleletet!

833'. Rajzoljatok a egyenest és egy rajta kívül fekvő A pontot! Húzzatok az A pontból az a egyeneshez AB merőlegest és AC ferdét! Mérjétek le a merőleges és a ferde hosszát! Hasonlítsátok össze a kapott értékeket, és vonjatok le következtetéseket!

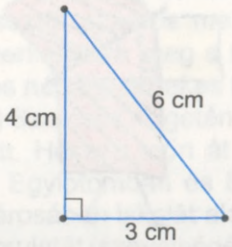
834'. A 427. ábrán az AD és DC az AB és BC ferdék vetületei. Ismert, hogy $AD < DC$. Melyik helyes az alábbi relációk közül:
1) $AB = BC$; 2) $AB > BC$; 3) $AB < BC$?

835°. Határozzátok meg az derékszögű háromszög átfogóját, ha befogói:
1) 12 cm és 5 cm; 2) 9 m és 12 m; 3) 8 cm és $8\sqrt{3}$ cm!

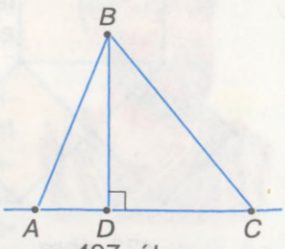
836°. Számítsátok ki a derékszögű háromszög befogóját, ha az átfogó és a másik befogó:
1) 13 cm és 12 cm; 2) 17 m és 15 m; 3) $15a$ és $9a$!



425. ábra



426. ábra



427. ábra

837°. A derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c. Töltsétek ki a 29. táblázatot!

29. táblázat

a		12 cm	$8a$
b	5 cm		$6a$
c	13 cm	20 cm	

838°. A téglalap oldalai a és b, átlója d. Töltsétek ki a 30. táblázatot!

30. táblázat

a	24 cm	10 cm	$12a$
b	7 cm		
d		26 cm	$15a$

839°. Bizonyítsátok be, hogy a téglalap átlójának négyzete két szomszédos oldala négyzetének összegével egyenlő!

840°. Határozzátok meg a négyzet átlóját, ha oldala $2\sqrt{2}$ cm!

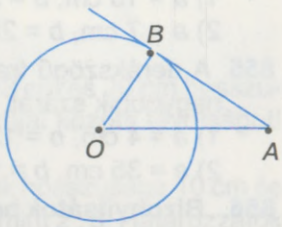
841°. Számítsátok ki az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóját, ha befogója:
1) 1 cm; 2) $4\sqrt{2}$ cm; 3) a!

842°. Határozzátok meg az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóit, ha átfogója:
1) $\sqrt{2}$ cm; 2) 8 cm; 3) m!

843°. Számítsátok ki az egyenlő oldalú háromszög magasságát, ha oldala:
1) $\sqrt{3}$ cm; 2) 10 cm; 3) a!

844°. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög alapjára bocsátott magasságot, ha szára és alapja megfelelően:
1) 26 cm és 20 cm; 2) 17 cm és 16 cm; 3) 13 cm és 10 cm!

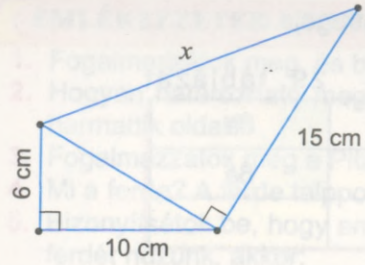
845°. Az O középpontú körvonalhoz az A pontból AB érintőt rajzoltak, ahol B az érintési pont (428. ábra). Határozzátok meg:
1) a kör sugarát, ha az érintő AB szakasza 8 cm, az A pont és a kör O középpontja közötti távolság pedig 17 cm;
2) az A pont és a kör O középpontja közötti távolságot, ha a kör sugara 12 cm, az érintő AB szakasza pedig 16 cm!



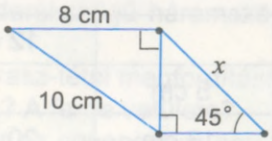
428. ábra

846°. Számítsátok ki a rombusz oldalát, ha átlói:
1) 6 cm és 8 cm; 2) 18 cm és 24 cm;
3) 12 cm és 16 cm!

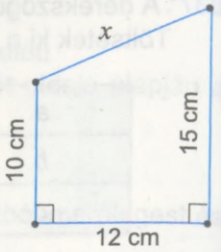
847°. Bizonyítsátok be: ha a rombusz oldala a, átlói pedig d_1 és d_2, akkor $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$.



429. ábra



430. ábra



431. ábra

848°. Az A pontból az egyeneshez AB merőlegest és AC ferdét húztak. Határozzátok meg:
1) az AC ferdét, ha BC vetülete 24 cm, az AB merőleges pedig 10 cm;
2) a ferde BC vetületét, ha az AB merőleges $8\sqrt{3}$ cm, az AC ferde pedig 16 cm;
3) az AB merőlegest, ha az AC ferde 17 cm, BC vetülete pedig 8 cm!

849. A 429–431. ábrák alapján számítsátok ki az ismeretlen x szakasz hosszát!

850. A derékszögű háromszög egyik befogója b, a másik 1 cm-rel rövidebb az átfogónál. Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha:
1) $b = 5$ cm; 2) $b = 7$ cm!

851. A derékszögű háromszög befogói úgy aránylanak egymáshoz, mint 3 : 4, az átfogó pedig c. Határozzátok meg a háromszög befogóit, ha:
1) $c = 25$ cm; 2) $c = 20$ cm!

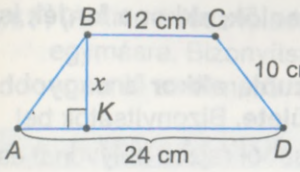
852. A derékszögű háromszög kerülete P, az átfogók aránya $m : n$. Számítsátok ki a háromszög oldalait, ha:
1) $P = 36$ cm, $m = 3$, $n = 4$;
2) $P = 80$ cm, $m = 15$, $n = 8$!

853. Az egyenlő szárú háromszög szárának és alapjának aránya $m : n$, az alapra bocsátott magasság h. Határozzátok meg a háromszög alapját és szárát, ha:
1) $m = 5$, $n = 6$, $h = 12$ cm;
2) $m = 17$, $n = 16$, $h = 15$ cm!

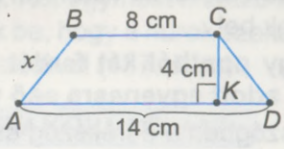
854. A paralelogramma oldalai a és b. Az egyik átló merőleges az oldalra. Számítsátok ki az átlók hosszát, ha:
1) $a = 15$ cm, $b = 9$ cm;
2) $a = 7$ cm, $b = 25$ cm!

855. A derékszögű trapéz alapjai a és b, magassága h. Határozzátok meg a nagyobbik szárat, ha:
1) $a = 4$ cm, $b = 12$ cm, $h = 6$ cm;
2) $a = 35$ cm, $b = 15$ cm, $h = 21$ cm!

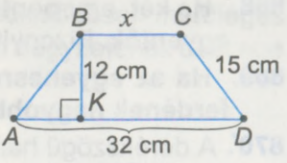
856. Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű trapéz átlói négyzetének különbsége egyenlő az alapok négyzetének különbségével!



432. ábra



433. ábra



434. ábra

857. A 432–434. ábrák adatai alapján határozzátok meg az egyenlő szárú *ABCD* trapéz ismeretlen x elemét!

858. Az egyenlő szárú trapéz alapjai a és b, magassága pedig h. Számítsátok ki a trapéz átlóját, ha:
1) $a = 6$ cm, $b = 18$ cm, $h = 16$ cm; 2) $a = 16$ cm, $b = 8$ cm, $h = 5$ cm!

859. Az a és b oldalú egyenlő szárú trapézba r sugarú kör van írva. Határozzátok meg a trapéz szárát, ha:
1) $a = 2$ cm, $b = 18$ cm, $r = 3$ cm; 2) $a = 32$ cm, $b = 18$ cm, $r = 12$ cm!

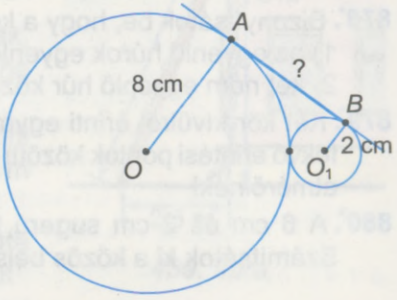
860. A rombusz tompaszögének csúcsából rajzolt magasság az oldalt a hegyesszög csúcsától számítva b és c szakaszokra osztja. Számítsátok ki a rombuszba írt kör sugarát, ha:
1) $b = 6$ cm, $c = 4$ cm; 2) $b = 5$ cm, $c = 8$ cm!

861. Az r sugarú körbe két egymással párhuzamos a és b hosszúságú húrt rajzoltak. Határozzátok meg a húrok közötti távolságot, ha:
1) $r = 25$ cm, $a = 40$ cm, $b = 48$ cm; 2) $r = 65$ cm, $a = 120$ cm, $b = 32$ cm!

862. Két, 2 cm és 8 cm sugarú kör kívülről érinti egymást. Határozzátok meg a közös érintőjükön lévő érintési pontok közötti szakasz hosszát (435. ábra)!

863. Adva van a és b szakasz. Szerkesszétek meg az alábbi szakaszok hosszát:
1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\sqrt{a^2-b^2}$!

864. Szerkesszetek négyzetet, melynek területe:
1) két adott négyzet területének összegével egyenlő;
2) két adott négyzet területének különbségével egyenlő!



435. ábra

865. Az egyeneshez egy pontból két ferdét húztak. Az egyik hossza 13 cm, vetülete pedig 12 cm. Határozzátok meg a másik ferde hosszát, ha az egyenessel alkotott szöge:
1) 30°; 2) 45°!

866. Az egyenestől 12 cm távolságra levő pontból két, 13 cm és 20 cm hosszúságú ferdét húztak. Számítsátok ki a ferdék talppontjai közötti távolságot! Hány megoldása van a feladatnak?

867. Egy pontból az egyeneshez két ferdét húztak, melyek hosszúsága 10 cm és 17 cm, vetületeik pedig úgy aránylanak egymáshoz, mint 2 : 5. Határozzátok meg: 1) a ferdék vetületét; 2) a pont és az egyenes közötti távolságot!

868. **Ha két, egy pontból rajzolt ferde vetületei egyenlők, akkor a ferdék is egyenlők.** Bizonyítsátok be!

869. **Ha az egyenesre egy pontból két ferdét húzunk, akkor a nagyobb ferdének nagyobb az adott egyenesre eső vetülete.** Bizonyítsátok be!

870*. A derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából rajzolt súlyvonal és magasság m és n. Számítsátok ki a háromszög kerületét, ha:
1) $m = 25$ cm, $n = 24$ cm; 2) $m = 17$ cm, $n = 15$ cm!

871*. A derékszögű háromszög egyik befogója b cm, az átfogó és a másik befogó összege n centiméterrel nagyobb. Határozzátok meg az átfogót és a másik befogót, ha:
1) $b = 60$, $n = 12$; 2) $b = 35$, $n = 14$!

872*. A háromszög c oldalára húzott magasság és súlyvonal h és m. Határozzátok meg a háromszög másik két oldalát, ha:
1) $c = 60$ cm, $h = 12$ cm, $m = 13$ cm; 2) $c = 42$ cm, $h = 12$ cm, $m = 13$ cm!

873*. Számítsátok ki a háromszög magasságát, ha oldalai:
1) 10 cm, 10 cm, 12 cm; 2) 7 cm, 15 cm, 20 cm!

874*. **Bizonyítsátok be, hogy a paralelogramma átlói négyzetének összege egyenlő az oldalak négyzetének összegével!**

875*. **Bizonyítsátok be: ha a trapéz átlói d_1 és d_2, alapjai a és b, szárai c és d, akkor $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$!**

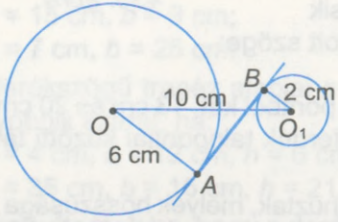
876*. Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű trapéz átlói négyzetének különbsége az alapok négyzetének különbségével egyenlő!

877*. Szerkesszetek az adott négyzet területénél kétszer kisebb területű négyzetet!

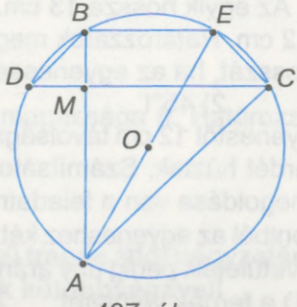
878*. Bizonyítsátok be, hogy a körben:
1) az egyenlő húrok egyenlő távolságra vannak a középponttól;
2) két nem egyenlő húr közül a nagyobbik közelebb van a középponthoz!

879*. Két kör kívülről érinti egymást. Bizonyítsátok be, hogy közös érintőjükön fekvő érintési pontok közötti szakasz hossza mértani közepe a körök átmérőinek!

880*. A 6 cm és 2 cm sugarú körök középpontjai között a távolság 10 cm. Számítsátok ki a közös belső érintő AB szakaszát (436. ábra)!



436. ábra

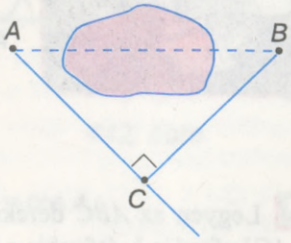


437. ábra

881*. (Arkhimédész feladata). Két egymást metsző húr kölcsönösen merőleges egymásra. Bizonyítsátok be, hogy a húrok szakaszai négyzetének összege egyenlő az átmérő négyzetével (437. ábra)!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

882. A 438. ábra azt mutatja, hogyan alkalmazták Pitagorasz tételét az *A* és *B* pontok közötti távolság meghatározására, ha a két pont között nincs járható út. Magyarázzátok meg a mérést!



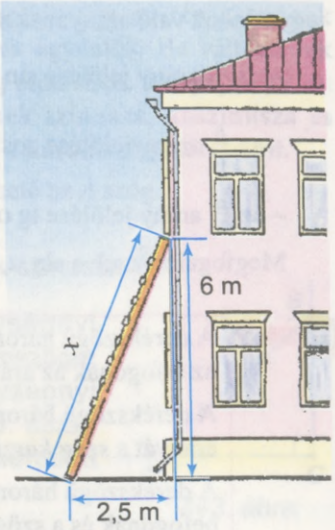
438. ábra

883. Két gyárépület közé ferde csúszdát kell építeni anyagszállítás céljára. A csúszda két végének magassága a földtől 7 m és 3 m. Mekkora hosszú lesz a csúszda, ha a két gyárépület közötti távolság 15 m?

884. A téglalap alakú földrészleg átlója 116 m, egyik oldala pedig 84 m. Számítsátok ki a földrészleg kerületét!

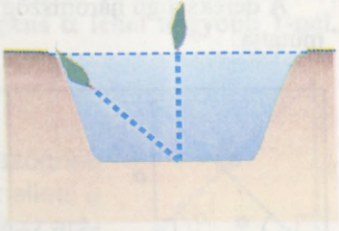
885. A 12,5 m magas árbocrúd három sodronykötéllel van rögzítve, melyek mindegyikének vége az árboc talpától 0,8 m és 4,4 m távolságra van. Számítsátok ki a sodronykötelek hosszát!

886. 1) Milyen hosszúnak kell lennie a létrának, hogy elérjen a 6 m magasan lévő ablakig, ha a létra talpa 2,5 m-re van a faltól?
2) Az épület falától milyen messzire kell állítani a 9 m hosszú létra alját, hogy másik vége 6 m magasan legyen?

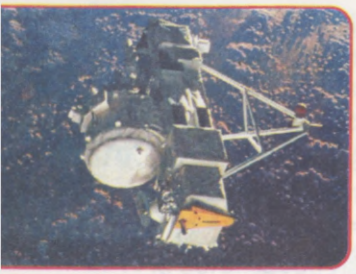


439. ábra

887*. (Csu Pei Szuan ókori kínai tudós feladata i. e. 1250-ből.) A négyzet alakú kopolyakút[1] közepén, melynek egy oldala 10 láb, nő egy káka, melynek víz feletti magassága 1 láb (1 láb ≈ 30 cm). Ha lehajlítjuk a kút széléig (a kopolyakút oldalának közepéig), csúcsa eléri a partot (440. ábra). Milyen mély a kopolyakút?

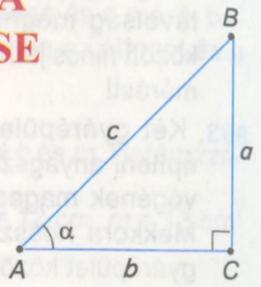

440. ábra

[1] Kopolya – áradás vájta vízzel telt gödör



21. §. A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG HEGYESSZÖGÉNEK SZINUSZA, KOSZINUSZA ÉS TANGENSE

Legyen az ABC derékszögű háromszög BC befogója a, AC befogója b, átfogója c és $A\angle = \alpha$ (441. ábra). Az a befogó szemben fekszik az α szöggel, a b befogó az α szög melletti. Mindkét befogó arányának az átfogóhoz, valamint a befogók egymáshoz való arányának speciális neve van.



441. ábra

– az $\frac{a}{c}$ arány jelölése $\sin\alpha$, olvassuk *szinusz alfa*.

– az $\frac{b}{c}$ arány jelölése $\cos\alpha$, olvassuk *koszinusz alfa*.

– az $\frac{a}{b}$ arány jelölése $\operatorname{tg}\alpha$, olvassuk *tangens alfa*.

Megfogalmazzuk a $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ meghatározásokat.

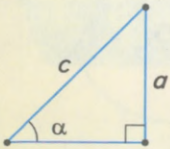
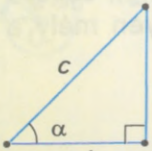
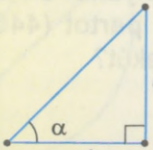
A derékszögű háromszögben a hegyesszöggel szemben fekvő befogónak és az átfogónak az arányát a ***szög szinuszának*** nevezzük.

A derékszögű háromszögben a szög melletti befogónak és az átfogónak az arányát a ***szög koszinuszának*** nevezzük.

A derékszögű háromszögben a szöggel szemben fekvő befogónak és a szög melletti befogónak az arányát a ***szög tangensének*** nevezzük.

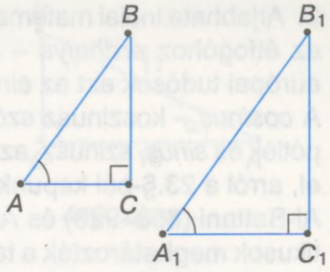
A derékszögű háromszög oldalainak arányát, valamint azok jelölését a 31. táblázat mutatja.

31. táblázat

 $\sin\alpha = \frac{a}{c}$	 $\cos\alpha = \frac{b}{c}$	 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

? Függ-e a szinusz, koszinusz, tangens értéke a háromszög méreteitől?

Nem függ. Vizsgáljuk meg. Legyen adva ABC és $A_1B_1C_1$ két derékszögű háromszög, melyekben $A\angle = A_1\angle$ (442. ábra). Az $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$ két szög alapján ($A\angle = A_1\angle$, $C\angle = C_1\angle = 90°$). A háromszögek megfelelő oldalai arányosak: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.



442. ábra

Ezekből az egyenlőségekből következik:

$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, azaz $\sin A = \sin A_1$; $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, azaz $\cos A = \cos A_1$;

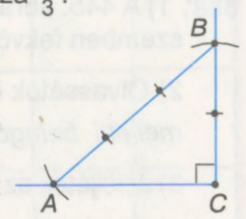
$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, azaz $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$.

Tehát a derékszögű háromszögekben azonos hegyesszög esetén a szögek szinuszai egyenlők, a koszinuszok egyenlők, a tangensek egyenlők. Ha változtatjuk a szögek fokmértékét, változik a derékszögű háromszög oldalainak aránya is. Ez azt jelenti, hogy **a derékszögű háromszög hegyesszögének szinusza, koszinusza és tangense csak a szög fokmértékétől függ, és nem függ a háromszög méreteitől.**

A $\sin A$, $\cos A$ vagy $\operatorname{tg} A$ adatai alapján megszerkeszthető az A szög.

Feladat. Szerkesszük meg a szöget, melynek szinusza $\frac{2}{3}$!

Megoldás. Kiválasztunk valamilyen egységnyi szakaszt (1 mm, 1 cm, 1 dm). Derékszögű háromszöget szerkesztünk, melynek BC befogója 2 egységnyi szakasz, az AB átfogó pedig 3 egységnyi (443. ábra). A BC befogóval szemben fekvő A szög a keresett szög, mivel $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$.

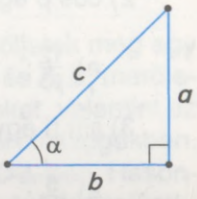


443. ábra

A derékszögű háromszög mindkét befogója kisebb az átfogónál. Ezért $\sin \alpha < 1$ és $\cos \alpha < 1$ valamennyi hegyesszög esetében. Mivel az egyik befogó lehet kisebb, nagyobb a másiknál, vagy egyenlő vele, ezért a tangens α lehet nagyobb 1-nél, kisebb 1-nél vagy egyenlő 1-gyel.

TUDJATOK TÖBBET!

1. A szinusz, koszinusz és tangens mellett az α szögnek egy másik aránya is van, a *kotangens*. Ez a szög melletti b befogónak és a szöggel szemben fekvő a befogónak az aránya (444. ábra) és így jelöljük: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.



444. ábra

2. Arjabhata indiai matematikus (V. sz.) a szöggel szemben fekvő befogó arányát az átfogóhoz *ardhajya* – ardhazsia (félív) néven említi. A XII. században az európai tudósok ezt az elnevezést latinra így fordították: *sinus* vagy szinusz. A *cosinus* – koszinusz szó két összetevőből ered: *complementi* – kiegészítés, pótlék és *sinus*, szinusz, azaz kiegészített szinusz. Hogy miért éppen így nevezték el, arról a 23.§-ból kapunk magyarázatot.
Al-Battani (858–929) és Abul-l-Wafa (940–998) arab csillagászok és matematikusok meghatározták a tangens fogalmát, megmérték a Nap szögmagasságát a pózna árnyéka alapján. Az α szöggel szemben fekvő befogó arányát a szög melletti befogóhoz *árnyék* néven említik. Később, a XVI. században ez az arány a tangens nevet kapta. A sin, cos, tg jelöléseket Leonard Euler vezette be a XVIII. században.

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Fogalmazzátok meg a derékszögű háromszög hegyesszöge szinuszának, koszinuszának, tangensének meghatározását!
2. A szinusz, koszinusz, tangens értéke miért csak a szög fokmértékétől függ, és nem függ a háromszög méreteitől?
3. Bizonyítsátok be, hogy $\sin\alpha < 1$, $\cos\alpha < 1$ tetszőleges α szögre vonatkozóan!
4. Hogyan szerkeszthető meg a szög a szinusz adott értéke alapján?

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

888'. 1) A 445. ábra alapján nevezzétek meg az α szög melletti és az α szöggel szemben fekvő befogót!

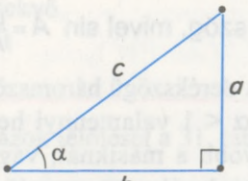
2) Olvassátok el az $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ és $\frac{a}{b}$ arányokat a *szemben fekvő befogó*, *szög melletti befogó*, *átfogó* fogalmakat használva!

3) Jelöljétek az $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ és $\frac{a}{b}$ arányok mindegyikét mint $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, vagy $\operatorname{tg}\alpha$!

889'. Melyik a helyes válasz (446. ábra)?

1) tg β egyenlő:

a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{12}{5}$; c) $\frac{5}{13}$;



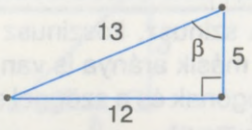
445. ábra

2) cos β egyenlő:

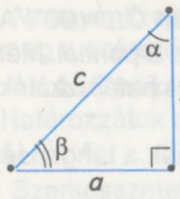
a) $\frac{12}{13}$; b) $\frac{13}{5}$; c) $\frac{5}{13}$;

3) sin β egyenlő:

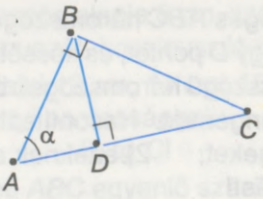
a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{12}{13}$; c) $\frac{13}{5}$.



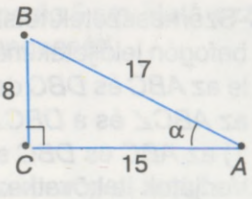
446. ábra



447. ábra



448. ábra



449. ábra

890. A 447. ábra alapján jelöljétek a helyes választ!

1) $\frac{a}{c}$ az α szög esetében: a) $\sin\alpha$; b) $\cos\alpha$; c) $\operatorname{tg}\alpha$;

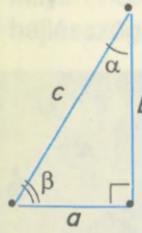
2) $\frac{a}{c}$ a β szög esetében: a) $\sin\beta$; b) $\cos\beta$; c) $\operatorname{tg}\beta$;

3) $\frac{b}{a}$ a β szög esetében: a) $\sin\beta$; b) $\cos\beta$; c) $\operatorname{tg}\beta$!

891. A 448. ábrán $ABC\angle = ADB\angle = 90°$. Írjátok fel az arányokat: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ az ABC és BDA háromszögek oldalai alapján!

892. Rajzoljátok át a munkafüzetbe a 32. táblázatot! Írjatok „+" jelet abba a kockába, ahol a háromszög oldalainak aránya megfelel a jelölésnek!

32. táblázat

Arány		Jelölés					
		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\beta$
	$\frac{a}{b}$						
	$\frac{b}{a}$						
	$\frac{b}{c}$						
	$\frac{a}{c}$						

893. A 449. ábrán feltüntetett adatok alapján határozzátok meg a szinusz, koszinusz és tangens értékét 0,1-nyi pontossággal!

894. Rajzoljatok tetszőleges C hegyesszöget! Egyik szárán jelöljetek meg egy A és egy A_1 pontot, majd állítsatok a szög másik szárára AB és A_1B_1 merőlegeseket. Mérjétek le milliméterekben az AB és A_1B_1 befogókat, valamint az AC és A_1C átfogókat a kapott ABC és A_1B_1C derékszögű háromszögekben. Határozzátok meg a $\sin C$ értékét az $ABC\Delta$-ben és az A_1B_1C-Δ-ben. Hasonlítsátok össze a kapott értékeket, vonjátok le a megfelelő következtetést!

895° Szerkesszetek tetszőleges ABC háromszöget, melyben $C\angle = 90°$! Az AC befogón jelöljetek meg egy D pontot, és kössétek össze a B ponttal. Mérjétek le az ABC és DBC derékszögű háromszögek befogóit, és határozzátok meg az $ABC\angle$ és a $DBC\angle$ tangensét. Hasonlítsátok össze:
1) az ABC és DBC szögeket; 2) ezeknek a szögeknek a tangensét!
Vonjatok le következtetést!

896° Rajzoljatok szögmérővel ilyen szögeket: 1) 35°; 2) 40°; 3) 75°!
Határozzátok meg a szögek szinuszát, koszinuszát, tangensét!

897° Lehet-e a szög szinusza, koszinusza:
1) 1; 2) 0,9; 3) 2?

898° Lehet-e a szög tangense:
1) 1; 2) 4; 3) 0,8?

899. Az ABC derékszögű háromszögben ($C\angle = 90°$) $AC = 18$ mm, $BC = 24$ mm. Határozzátok meg: 1) $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$; 2) $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$!

900. A derékszögű háromszög befogói 24 cm és 7 cm. Határozzátok meg:
1) a kisebbik befogóval szemben fekvő hegyesszög koszinuszát;
2) a nagyobbik befogóval szemben fekvő hegyesszög szinuszát;
3) a nagyobbik befogóval szemben fekvő hegyesszög tangensét!

901. Az A pontból egy egyeneshez $AB = 15$ cm ferdét, és $AC = 9$ cm merőlegest húztak. Határozzátok meg: 1) az A szög szinuszát és koszinuszát;
2) a B szög szinuszát és koszinuszát!

902. Szerkesszetek egy olyan szöget, melynek szinusza:
1) $\frac{3}{5}$; 2) 0,5!

903. Szerkesszetek egy olyan szöget, melynek koszinusza:
1) $\frac{5}{6}$; 2) 0,6!

904. Szerkesszetek egy olyan szöget, melynek tangense:
1) 2; 2) $\frac{4}{7}$!

905. Szerkesszetek ABC derékszögű háromszöget ($C\angle = 90°$), ha:
1) $\sin A = 0{,}4$; 2) $\cos B = \frac{2}{7}$; 3) $\operatorname{tg} A = \frac{1}{3}$!

906. Az egyenlő szárú háromszög alapja 12 cm, az alapra bocsátott súlyvonal 8 cm. Határozzátok meg:
1) az alapon fekvő szög szinuszát, koszinuszát, tangensét;
2) a szár és a súlyvonal közötti szög szinuszát, koszinuszát, tangensét!

907* Az egyenlő szárú trapéz alapjai 9 cm és 21 cm, szára pedig 10 cm. Határozzátok meg:
1) a nagyobbik alapon fekvő szög szinuszát és koszinuszát;
2) az átló és a magasság közötti szög szinuszát és koszinuszát!

908. Az egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm, szára pedig 5 cm. Határozzátok meg a szárszögének szinuszát, koszinuszát és tangensét!

909. Az ABC háromszög oldalai 13 cm, 14 cm, 15 cm. Határozzátok meg 0,01-nyi pontossággal:
1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} C$!

910. Szerkesszetek AC alapú ABC egyenlő szárú háromszöget, melyben:

1) $\sin A = 0{,}8$; 2) $\cos C = \frac{1}{3}$; 3) $\operatorname{tg} A = 0{,}6$!

911. A derékszögű háromszögben a befogó 8 cm, a szemben fekvő szög szinusza pedig 0,8. Határozzátok meg az átfogót és a másik befogót!

912. Számítsátok ki az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) ismeretlen oldalait, ha:

1) $AC = 6$ cm, $\sin B = 0{,}6$; 2) $BC = 36$ cm, $\cos A = \frac{5}{13}$; 3) $AB = 20$ cm, $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$!

913. Szerkesszetek ABC derékszögű háromszöget, ha:
1) a c átfogó 8 cm, $\sin A = 0{,}75$;
2) a b befogó 20 mm, $\cos A = 0{,}4$;
3) az a befogó 5 cm, $\operatorname{tg} A = 1{,}25$!

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

914. Az építkezéseknél a szög fokmértéke helyett gyakran tangensének értékét használják. Például az építőmester számára a tető α hajlásszögének fokmértéke helyett (450. ábra) a BC és AC oldalak hosszának arányát adják meg, vagyis a tg α-t.
Milyen hosszú BC szarufa kell egy $AD = 20$ m széles tetőhöz, ha a tető hajlásszögének tangense 0,8?



450. ábra



22. §. A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG SZÖGEI ÉS OLDALAI KÖZÖTTI ÖSSZEFÜGGÉS

Már tudjátok, hogy $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ (451. ábra).

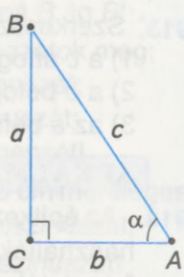
Ebből meghatározhatjuk, hogy: 1) $a = c\sin\alpha$, 2) $b = c\cos\alpha$, 3) $a = b\operatorname{tg}\alpha$.

Ezeket a matematikai képlettel felírt összefüggéseket így fogalmazhatjuk meg:

1. Az α szöggel szemben fekvő befogó egyenlő az átfogó és az α szög szinuszának szorzatával.

2. Az α szög mellett fekvő befogó egyenlő az átfogó és az α szög koszinuszának szorzatával.

3. Az α szöggel szemben fekvő befogó egyenlő a másik befogó és az α szög szinuszának szorzatával.



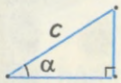
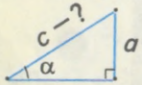
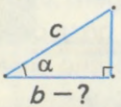
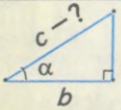
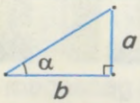
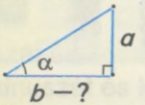
451. ábra

Az 1) és 2) egyenlőségekből meghatározhatjuk a c átfogót, az a vagy b befogó és az α hegyesszög ismeretében: 4) $c = \frac{a}{\sin\alpha}$, 5) $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

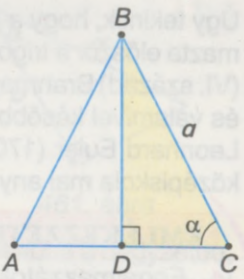
A 3) egyenlőségből meghatározhatjuk a b befogót az a befogó és az α hegyesszög ismeretében: 6) $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$.

A derékszögű háromszög ismeretlen oldalainak a meghatározásához egyik oldala és egyik hegyesszögének ismeretében használjátok az 1) – 6) képleteket (33. táblázat).

33. táblázat

1	$a = c \cdot \sin\alpha$ 	4	 $c = \frac{a}{\sin\alpha}$
2	$b = c \cdot \cos\alpha$ 	5	 $c = \frac{b}{\cos\alpha}$
3	$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$ 	6	 $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

Feladat. Határozzuk meg annak az egyenlő szárú háromszögnek az alapját, melynek szára a és alapon fekvő szöge α!



452. ábra

Megoldás. Használjuk a 452. ábra jelölését. Az ABC egyenlő szárú háromszög BC szára egyenlő a-val, $C\angle = \alpha$. Húzzuk meg a BD magasságot! A DBC derékszögű háromszögben DC az α szög melletti befogó, ezért $DC = a \cos \alpha$

Mivel az egyenlő szárú háromszögben az alaphoz tartozó magasság egyben súlyvonal is, ezért $DC = AD$.

Tehát a háromszög alapja $AC = 2 \cdot DC = 2\,a \cos \alpha$.

TUDJATOK TÖBBET!

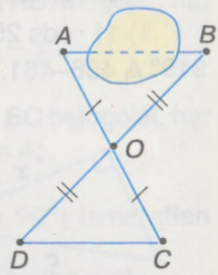
Ebben a fejezetben megismerkedtetek a derékszögű háromszög oldalai és szögei meghatározásának egy új módszerével. Felmerül a kérdés, *szükséges-e ez a módszer?*

Biztosan tudjátok, hogy a régmúltban a távolságot és a szögeket közvetlenül mérték. Már Kr. e. 2000 évvel a babilóniaiak szögmérőt használtak.

Viszont a valóságban távolságot és szöget nem mindig lehet közvetlenül mérni. Hogyan lehet két olyan helység között megmérni a távolságot, melyeket folyó, tó, erdő választ el egymástól? Hogyan lehet megmérni a Nap és a Föld, a Nap és a Hold közötti távolságot, egy fa, egy hegy magasságát, egy emelkedő vagy lejtő meredekségét? Ezért van szükség *közvetett* mérési módszerekre: az egybevágóság, hasonlóság vagy mértani szerkesztés alkalmazására. A helyszínen segédháromszöget szerkesztettek és azok megfelelő méreteit vizsgálták.

Már tudjátok, hogyan lehet az A és B helységek közötti távolságot meghatározni, melyeket egy tó választ el (453. ábra). Megszerkesztjük az $AOB\Delta$ háromszöggel egybevágó $COD\Delta$-et, és a keresett AB távolság helyett a vele egyenlő CD távolságot mérjük meg.

Ezek a módszerek azonban nem vezettek mindig pontos eredményre, különösen akkor, ha nagyobb távolságot kellett megmérni és szögmérésre alkalmas eszközök nélkül nem is tudták megmérni a szögek fokmértékét a szakaszok hosszának ismeretében.



453. ábra

Ezért vált szükségessé olyan módszer alkalmazása, melyben kevesebb mérésre van szükség, és nagyobb szerep jut a számításoknak. Az egyik ilyen lehetőség a derékszögű háromszögben a sin α, cos α és tg α alkalmazása.

Ezen számítások a matematika egy új fejezetét nyitották meg, melyet a XVI. században *trigonometriának* neveztek el. A trigonometria görög eredetű kifejezés, *trigonosz* – háromszög és *metron* – mérés szavakból ered.

Úgy tekintik, hogy a görög Hipparkhosz (Kr. e. II. sz.) és Ptolemaiosz (II. sz.) alkalmazta először a trigonometriát feladatok megoldásához. Ezután az indiai Arjabhata (VI. század) Brahmagupta (VII. sz.) tökéletesítette, majd az üzbég al-Kashi (XII. sz.) és valamivel később Ulukbek. A trigonometria jelöléseit, mintegy végleges alakját Leonhard Euler (1707–1783) adta meg *Bevezetés* című könyvében 1748-ban. A középiskola mai anyaga körülbelül az Euler tárgyalta ismeretanyag.

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Fogalmazzátok meg az $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$, $a = b \operatorname{tg} \alpha$ egyenlőségeket, ahol a, b befogók, c pedig átfogó!
2. Magyarázzátok meg, hogyan lehet meghatározni a derékszögű háromszög átfogóját, ha ismerjük az egyik befogót és egyik hegyesszögét!
3. Hogyan lehet a befogót meghatározni a mellette lévő szög és a másik befogó ismeretében?

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

915'. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

A derékszögű háromszög befogója egyenlő:

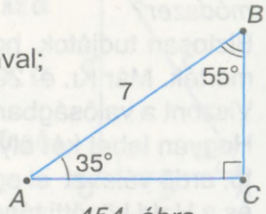
1) a mellette lévő szög tangense és az átfogó szorzatával;

2) a szemközti szög tangense és a másik befogó szorzatával;

3) a mellette lévő szög szinusza és az átfogó szorzatával;

4) a mellette lévő szög koszinusza és az átfogó szorzatával;

5) a szemközti szög szinusza és az átfogó szorzatával.



454. ábra

916'. Melyik alábbi kifejezéssel számítható ki a BC befogó hossza (454. ábra):

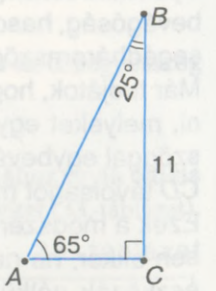
1) $7 \cdot \sin 55°$; 2) $7 \cdot \cos 55°$; 3) $7 \cdot \operatorname{tg} 35°$?

917'. Melyik alábbi kifejezéssel számítható ki az AC befogó hossza (455. ábra):

1) $11 \cdot \operatorname{tg} 65°$; 2) $11 \cdot \cos 25°$; 3) $11 \cdot \operatorname{tg} 25°$?

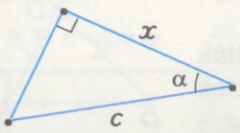
918'. Melyik alábbi kifejezéssel számítható ki az AC átfogó hossza (455. ábra):

1) $11 \cdot \cos 25°$; 2) $\frac{11}{\sin 65°}$; 3) $11 \cdot \operatorname{tg} 25°$?

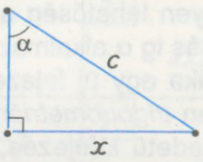


455. ábra

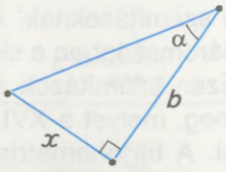
919°. A 456–461. ábrák alapján határozzátok meg az x értékét!



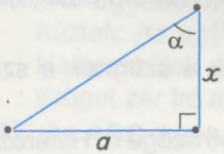
456. ábra



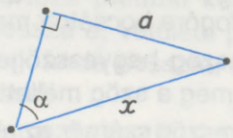
457. ábra



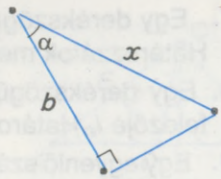
458. ábra



459. ábra



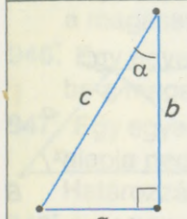
460. ábra



461. ábra

920°. Rajzoljátok be a füzetbe a 34. táblázatot! Tegyetek „+" jelet abba a négyzetbe, ahol a kifejezés értéke egyenlő a derékszögű háromszög megfelelő oldalával!

34. táblázat

Oldal		Kifejezés				
		$c \cdot \cos\alpha$	$c \cdot \sin\alpha$	$b \cdot \operatorname{tg}\alpha$	$\frac{a}{\sin\alpha}$	$\frac{b}{\cos\alpha}$
	a					
	b					
	c					

921°. Egy derékszögű háromszög hegyesszöge A, átfogója pedig c. Számítsátok ki az A szöggel szemközti befogót, ha:

1) $c = 12$ cm, $\sin A = \frac{1}{4}$; 2) $c = 20$ cm, $\sin A = \frac{2}{5}$; 3) $c = 18$ cm, $\sin A = \frac{2}{3}$!

922°. Egy derékszögű háromszög hegyesszöge A, átfogója c. Számítsátok ki az A szög melletti befogót, ha:

1) $c = 6$ cm, $\cos A = \frac{1}{3}$; 2) $c = 14$ cm, $\cos A = \frac{2}{7}$; 3) $c = 8$ cm, $\cos A = \frac{3}{4}$!

923°. Számítsátok ki az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) AB átfogóját, ha:

1) $BC = 16$ cm, $\cos B = \frac{1}{8}$; 2) $BC = 12$ cm, $\cos B = \frac{3}{4}$;

3) $BC = 5$ cm, $\cos B = 0{,}5$!

924°. Számítsátok ki az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) AB átfogóját, ha:

1) $BC = 24$ cm, $\sin A = \frac{3}{8}$; 2) $BC = 10$ cm, $\sin A = \frac{1}{5}$;

3) $BC = 7$ cm, $\sin A = 0{,}7$!

925°. Számítsátok ki az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) BC befogóját, ha:

1) $AC = 8$ cm, $\operatorname{tg} A = 0{,}6$; 2) $AC = 12$ cm, $\operatorname{tg} A = 4$;

3) $AC = 11$ cm, $\operatorname{tg} A = 1{,}5$!

926°. Számítsátok ki az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) ismeretlen oldalait, ha:

1) $AB = c$, $B\angle = \beta$; 2) $BC = a$, $A\angle = \alpha$; 3) $AC = b$, $B\angle = \beta$!

927. Egy derékszögű háromszög hegyesszöge α, a szög melletti befogója b. Határozzátok meg az átfogóra bocsátott magasságot!

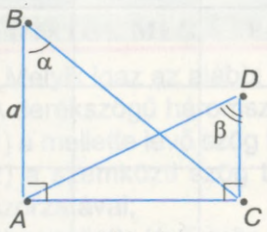
928. Egy derékszögű háromszög hegyesszöge α, ennek a szögnek a szögfelezője l. Határozzátok meg a szög melletti befogót!

929. Egy egyenlő szárú háromszög szára b, az alapon fekvő szöge α. Határozzátok meg: 1) a háromszög alapját; 2) az alaphoz tartozó magasságot!

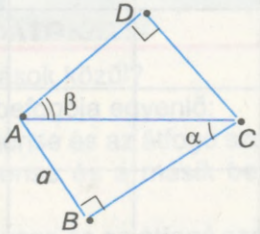
930. Egy egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága h, az alapon fekvő szöge α. Határozzátok meg:
1) a háromszög szárát; 2) a háromszög alapját!

931. Egy egyenlő szárú háromszög alapja a, szárszöge pedig α. Határozzátok meg: 1) az alaphoz tartozó magasságot; 2) a háromszög szárát!

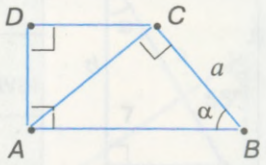
932. A 462–464. ábrák alapján határozzátok meg az AD és CD szakaszok hosszát!



462. ábra



463. ábra



464. ábra

933. Határozzátok meg annak a derékszögű háromszögnek a befogóit, melynek az átfogóhoz tartozó súlyvonala m, hegyesszöge pedig α!

934. Határozzátok meg a derékszögű háromszög köré írt körvonal sugarát, ha egyik befogója b, hegyesszöge pedig α!

935. Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge α, a háromszögbe írt körvonal sugara r.
Határozzátok meg: 1) a háromszög alapját; 2) a háromszög szárát!

936. Egy egyenlő szárú háromszög magassága h, alapon fekvő szöge α. Határozzátok meg a háromszögbe írt körvonal sugarát!

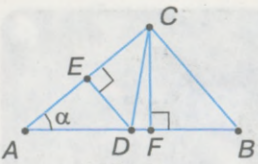
937. Az $ABCD$ téglalap AD oldala a, és az AC átlóval α szöget zár be. Határozzátok meg a téglalap köré írt körvonal sugarát!

938. Egy téglalap átlói által bezárt kisebbik szög α, a vele szemközti oldal pedig a. Határozzátok meg: 1) a téglalap másik oldalát; 2) a téglalap átlóit!

939. **Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha a háromszögbe írt körvonal sugara r és a szögei α, β, γ!**

940. Az egyeneshez nem tartozó, tőle m távolságra lévő pontból két ferdét húztak. A ferdék és az egyenes hajlásszöge α és β ($\alpha < \beta$).
Határozzátok meg:
1) a ferdék hosszát; 2) a ferdék talppontjai közötti távolságot!

941. Az egyeneshez nem tartozó pontból két ferdét húztak. Az egyik ferde hossza a, vetülete pedig b. Határozzátok meg a másik ferde hosszát, ha az β szöget zár be az egyenessel!



465. ábra

942.* Az ABC derékszögű háromszögben ($C\angle = 90°$) CF az átfogóhoz tartozó magasság, CD súlyvonal, $DE \perp AC$ (465. ábra).

Fejezzétek ki az ábrán lévő összes szakaszt az $AC = a$ befogón és az $A\angle = \alpha$ szögön keresztül!

943.* Határozzátok meg a derékszögű háromszögbe írt körvonal sugarát, ha egyik befogója b, a befogó melletti hegyesszöge α!

944.* Egy rombusz nagyobbik átlója d, hegyesszöge α.

Határozzátok meg: 1) a rombusz oldalát; 2) a rombusz kisebbik átlóját!

945.* Egy egyenlő szárú trapéz kisebbik alapja b, szára c pedig α szöget zár be a magassággal. Határozzátok meg a trapéz alapját!

946.* Egy egyenlő szárú trapéz nagyobbik alapja a, szára c pedig α szöget zár be a magassággal. Határozzátok meg a trapéz rövidebb alapját!

947.* Egy egyenlő szárú trapéz h magassága α szöget zár be a szárral, kisebbik alapja pedig b.

Határozzátok meg: 1) a trapéz szárát; 2) a trapéz nagyobbik alapját!

948.* Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC = b$, $A\angle = \alpha$, $C\angle = \beta$. Határozzátok meg az AB és BC oldalak AC oldalra eső vetületeinek hosszát!

949.* **Bizonyítsátok be, hogy az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) területe kiszámítható az $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B$ képlettel!**

950.* **Bizonyítsátok be, hogy az ABC hegyesszögű háromszög területe kiszámítható az $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C$ képlettel!**

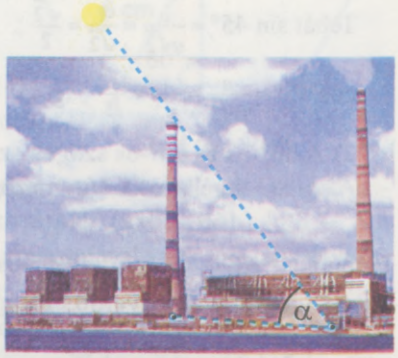
ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

951.* Egy 40 méter magas gyárkémény árnyéka 50 m. Határozzátok meg hány fokos szög alatt esnek a Nap sugarai a földre! Vegyétek figyelembe a feladat megoldásánál az alábbi tervet (466. ábra):

1) határozzátok meg az α szög tangensét;

2) a tangens értéke alapján szerkesszétek meg az $A\angle = \alpha$ szöget;

3) szögmérővel mérjétek meg az A szöget!



466. ábra

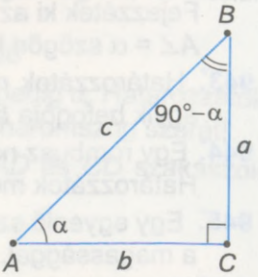


23. §. NÉHÁNY SZÖG SZINUSZÁNAK, KOSZINUSZÁNAK ÉS TANGENSÉNEK MEGHATÁROZÁSA

Legyen az ABC derékszögű háromszögben $A\angle = \alpha$, akkor $B\angle = 90° - \alpha$ (467. ábra). A hegyesszög szinuszának és koszinuszának meghatározása alapján:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \qquad \cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c};$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \qquad \sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c}.$$



467. ábra

Összehasonlítva ezeket az oszlopokat felírhatjuk:

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$.

Láthatjuk, hogy a pótszögek szinusz és koszinusz értékei között az alábbi összefüggés áll fenn: hegyesszög szinusza egyenlő pótszögének koszinuszával.

Például: $\sin 30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60°$;

$\sin 60° = \cos(90° - 60°) = \cos 30°$.

Határozzuk meg a következő nevezetes szögek szinuszát, koszinuszát, tangensét: 45°, 30°, 60°!

1) A 45°-os szög szögfüggvényei.

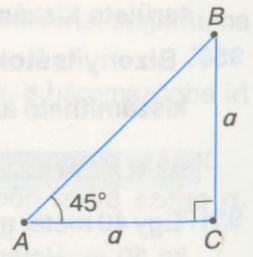
Az ABC derékszögű háromszög átfogója c, hegyesszöge pedig $A\angle = 45°$ (468. ábra). Akkor $B\angle = 45°$. Tehát az ABC háromszög egyenlő szárú. Jelöljük $AC = BC = a$-val.

Pitagorasz tétele alapján

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Tehát $\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} 45° = \frac{a}{a} = 1$.

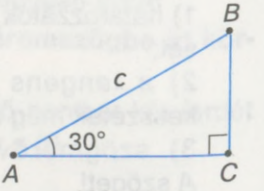


468. ábra

2) A 30°-os és 60°-os szögek szögfüggvényei.

Az ABC derékszögű háromszög átfogója c, hegyesszöge $A\angle = 30°$ (469. ábra). Határozzuk meg az AC és BC befogókat! $BC = \frac{c}{2}$, mert a 30°-os szöggel szembeni befogó az átfogó felével egyenlő. Pitagorasz tételéből adódóan

$$AC = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$



469. ábra

Így a meghatározás alapján $\sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{tg} 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

Ha az ABC derékszögű háromszögben $A\angle = 30°$ (469. ábra),

akkor $B\angle = 90° - 30° = 60°$. Vagyis $\operatorname{tg} 60° = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}$.

Az eredményeket a 35. táblázatban foglaltuk össze.

35. táblázat

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

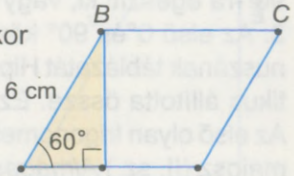
A táblázatból kiolvasható, hogy ha **a szöget növeljük, akkor a szög szinusza és tangense nő, a szög koszinusza pedig csökken.** Ha a szöget csökkentjük, akkor a szinusza és a tangense csökken, a koszinusza pedig nő.

Feladat. Egy rombusz oldala 6 cm, hegyesszöge 60°. Mekkora a rombusz magassága?

Megoldás. Használjuk a 470. ábra jelölését! Akkor $AB = 6$ cm és $A\angle = 60°$. Húzzuk meg a BM magasságot!

Az ABM derékszögű háromszögből:

$BM = AB \cdot \sin A = 6 \cdot \sin 60° = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (cm).



470. ábra

? Hogyan lehet meghatározni 30°-tól, 45°-tól és 60°-tól különböző hegyesszögek szinuszát, koszinuszát és tangensét?

Zsebszámológéppel, a számítógépek számológép programjával vagy speciális táblázatok segítségével két feladattípust tudunk megoldani:

1) a megadott szögnek meghatározni szinuszát, koszinuszát, tangensét;

2) az ismert szinusz, koszinusz és tangens értékhez meghatározni a szöget!

Ha számológépet használunk és a szög fokokban és percekben van megadva, akkor a perceket tizedes tört alakban kell felírni (el kell osztani 60-nal). Például $55°42' = 55{,}7°$. Ha $\cos\alpha \approx 0{,}8796$, akkor $\alpha \approx 28{,}40585°$, ezt felírhatjuk percekben is (a törtrészt szorozzuk meg 60-nal). Kerekítve: $\alpha \approx 28°24'$.

A sin α, cos α és tg α értékeket táblázat segítségével tudjuk meghatározni.

A szinusz és koszinusz értékek táblázata (lásd az 1. számú mellékletet) négy oszlopból áll. Az első oszlop tartalmazza a szögek fokmértékét 0°-tól 45°-ig, a negyedik 90°-től 45°-ig. A második és harmadik oszlop felett szinusz és koszinusz, alatta koszinusz, szinusz látható.

A felső megnevezés a 45°-nál kisebb szögekre vonatkozik, az alsó a 45°-nál nagyobbakra. Például a táblázatból meghatározhatjuk, hogy $\sin 34° \approx 0{,}559$, $\cos 67° \approx 0{,}391$, $\sin 85° \approx 0{,}996$ stb.

A táblázatból a szinusz és a koszinusz érték ismeretében visszakereshetjük az α szög fokmértékét. Például meg kell határozni α értékét, ha $\sin\alpha \approx 0{,}615$. A szinusz értékek oszlopában megkeressük a 0,615-höz legközelebbi számot. Ez a szám a 0,616. Tehát $\alpha \approx 38°$.

A tangens értékek táblázata (lásd a 2. számú mellékletet) két oszlopból áll, az egyik tartalmazza a szögek fokmértékét 0°-tól 89°-ig, a másik a hozzájuk tartozó tangens értéket.

Például $\operatorname{tg} 19° \approx 0{,}344$. Ha $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}869$, akkor $\alpha \approx 41°$.

TUDJATOK TÖBBET!

1. Már tudjátok, hogy a derékszögű háromszög minden α szögéhez csak egy sin α, cos α és tg α érték tartozik. Ezért a szinusz, koszinusz és tangens értékek az α szög függvényei. Ezeket a függvényeket *trigonometrikus függvényeknek* nevezzük, melyek argumentuma 0°-tól 90°-ig változik.

2. Pontosítsuk a koszinusz szó eredetét. A $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ azonosságból ered ez az elnevezés, kiegészítő szinusz, vagyis annak a szögnek a szinusza, ami az adott szöget 90°-ra egészíti ki, vagy másképpen az adott szög pótszöge.

3. Az első 0°és 90° közé eső szögek szinuszának és koszinuszának táblázatát Hipparkhosz (Kr. e. II. sz.) görög matematikus állította össze. Ez a táblázat sajnos nem maradt fenn. Az első olyan trigonometrikus táblázat, amelyről tudunk, Ptolemaiosz (II. sz.) *Almageszt* művéből ismerjük. De fennmaradt Arjabhata (V. sz.), Al-Battani és Abul-l-Wafa (X. sz.) trigonometrikus táblázata is.



Ptolemaiosz

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

1. Fogalmazzátok meg a pótszögek szinusza és koszinusza közötti összefüggést!
2. Adjátok meg a nevezetes szögek szinuszát, koszinuszát és tangensét!
3. Magyarázzátok meg, hogyan lehet meghatározni sin 36°; cos 64; tg 57°-ot!
4. Magyarázzátok meg, hogyan lehet meghatározni az α szöget, ha $\sin\alpha = 0{,}655$; $\cos\alpha = 0{,}818$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}467$!

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

952. Határozzátok meg az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) $A\angle$-ét, ha a $B\angle$: 1) 30°; 2) 70°; 3) 85°!

953. A $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$, $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ képletek alkalmazásával helyettesítsétek az adott szögek:
1) koszinuszát pótszögének szinuszával: cos 20°; cos 35°; cos 50°; cos 74°;
2) szinuszát pótszögének koszinuszával: sin 10°; sin 65°; sin 85°; sin 25°!

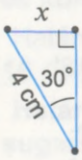
954. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:
1) 2 sin 30°; 2) 4 cos 60°; 3) $\sqrt{3}$ tg 30°!

955. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét (1., 2. melléklet):
1) sin 20°; sin 75°; sin 33°; sin 85°; sin 53°; sin 2°;
2) cos 6°; cos 67°; cos 51°; cos 24°; cos 62°; cos 13°;
3) tg 65°; tg 1°; tg 73°; tg 19°; tg 10°; tg 16°!

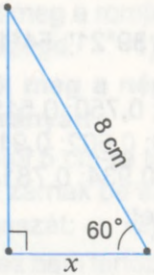
956. Határozzátok meg az α szöget (1., 2. melléklet), ha:
1) $\sin\alpha = 0{,}999$; $\sin\alpha = 0{,}017$; $\sin\alpha = 0{,}574$; $\sin\alpha = 0{,}588$;
2) $\cos\alpha = 0{,}766$; $\cos\alpha = 0{,}966$; $\cos\alpha = 0{,}225$; $\cos\alpha = 0{,}731$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}900$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}344$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}781$; $\cos\alpha = 0{,}839$!

957. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket: 1) $2\cos(90° - \alpha) - \sin\alpha$;
2) $\sin\alpha + \cos(90° - \alpha)$; 3) $3\cos\alpha - 2\sin(90° - \alpha)$!

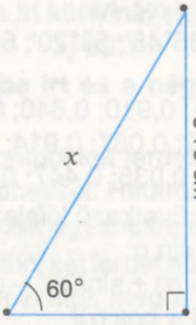
958. A 471–476. ábrák adatai alapján határozzátok meg az x értékét!



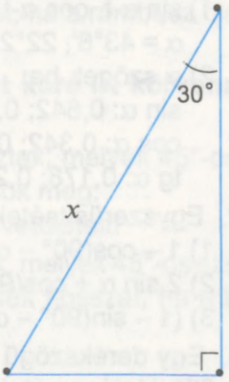
471. ábra



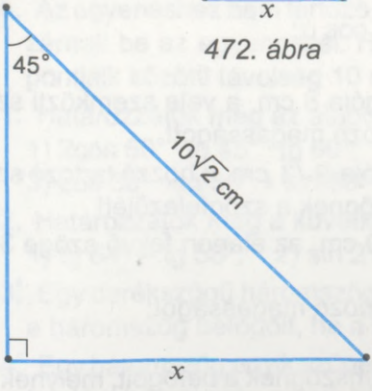
472. ábra



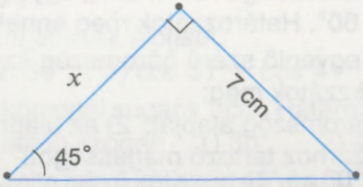
473. ábra



474. ábra



475. ábra



476. ábra

959. Az ABC derékszögű háromszögben ($C\angle = 90°$) $A\angle = 30°$. Határozzátok meg:
1) BC-t, ha $AB = 4$ cm; 2) AC-t, ha $BC = 2\sqrt{3}$ cm; 3) AB-t, ha $AC = 4\sqrt{3}$ cm!

960. Az MNK derékszögű háromszögben ($K\angle = 90°$) $M\angle = 60°$. Határozzátok meg:
1) MN-t, ha $MK = 3$ cm; 2) NK-t, ha $MK = 2\sqrt{3}$ cm; 3) MK-t, ha $NK = 7\sqrt{3}$ cm!

961. Az ABC derékszögű háromszögben ($C\angle = 90°$) $A\angle = 45°$. Határozzátok meg:
1) AB-t, ha $AC = \sqrt{2}$ cm; 2) BC-t, ha $AB = 5\sqrt{2}$ cm; 3) AC-t, ha $BC = 9$ cm!

962. Az egyeneshez nem tartozó A pontból az egyenesre AB ferdét húztak, melynek hossza 10 cm és 60°-os szöget zár be az egyenessel. Határozzátok meg: 1) a ferde egyenesre eső vetületét; 2) az A pont távolságát az egyenestől!

963. Hány fokos az α szög, ha:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$?

964. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:
1) $\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 60°$; 2) $8 \sin 30° \cdot \cos 60°$;
3) $2 \sin 30° + \sqrt{3} \cos 30°$; 4) $6 \cos 60° - \sqrt{3} \operatorname{tg} 30°$!

965. Rendezzétek növekvő sorrendbe az alábbi értékeket:
1) $\sin 15°$, $\sin 46°$, $\sin 75°$, $\sin 10°$, $\sin 11°$;
2) $\cos 50°$, $\cos 34°$, $\cos 20°$, $\cos 72°$, $\cos 25°$;
3) $\operatorname{tg} 37°$, $\operatorname{tg} 87°$, $\operatorname{tg} 66°$, $\operatorname{tg} 17°$, $\operatorname{tg} 48°$!

966. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét! Használjatok számológépet!
1) $\sin\alpha$-t, $\cos\alpha$-t és $\operatorname{tg}\alpha$-t, ha:
$\alpha = 43°6'$; $22°25'$; $35°48'$; $58°20'$; $64°13'$; $39°21'$; $54°12'$; $83°18'$;
2) α szöget, ha:
$\sin\alpha$: 0,642; 0,771; 0,910; 0,640; 0,712; 0,750; 0,515; 0,892;
$\cos\alpha$: 0,342; 0,962; 0,087; 0,914; 0,809; 0,602; 0,915; 0,839;
$\operatorname{tg}\alpha$: 0,178; 0,269; 0,035; 0,447; 0,532; 0,934; 0,781; 0,578!

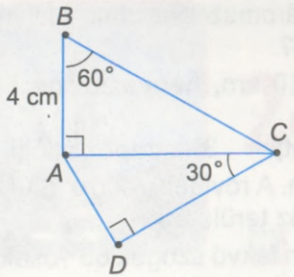
967. Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:
1) $1 - \cos(90° - \alpha) + \sin\alpha$;
2) $2 \sin\alpha + \cos(90° - \alpha) + \sin(90° - \alpha) - \cos\alpha$;
3) $(1 - \sin(90° - \alpha))(1 + \cos\alpha)$!

968. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 8 cm, a vele szemközti szög 60°. Határozzátok meg az átfogóhoz tartozó magasságot!

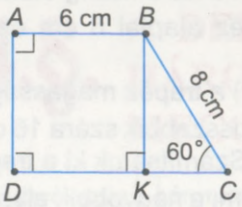
969. Egy derékszögű háromszög egyik befogója $9\sqrt{3}$ cm, a hozzá tartozó szög pedig 60°. Határozzátok meg ennek a szögnek a szögfelezőjét!

970. Egy egyenlő szárú háromszög szára 10 cm, az alapon fekvő szöge 30°. Határozzátok meg:
1) a háromszög alapját; 2) az alaphoz tartozó magasságot;
3) a szárhoz tartozó magasságot!

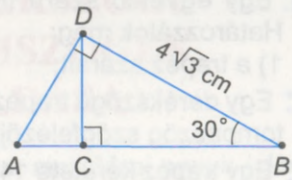
971. Számítsátok ki annak a derékszögű háromszögnek a befogóit, melynek az átfogóra bocsátott súlyvonala 8 cm, hegyesszöge: 1) 30°; 2) 45°!



477. ábra



478. ábra



479. ábra

972. A 477 – 479. ábrák alapján számítsátok ki az *AD* és *CD* szakaszok hosszát!

973. Egy rombusz oldala 4 cm, egyik szöge 60°. Számítsátok ki a rombusz átlóit!

974. Egy rombusz hosszabbik átlója $12\sqrt{3}$ cm, egyik szöge 120°. Határozzátok meg a rombusz oldalát és rövidebb átlóját!

975. Egy paralelogramma átlója 12 cm és merőleges az oldalra. Számítsátok ki a paralelogramma oldalait, ha egyik szöge:
1) 30°; 2) 45°!

976. **Határozzátok meg az *a* oldalú szabályos háromszögbe írt körvonal *r* és köré írt körvonal *R* sugarát!**

977. Határozzátok meg a rombuszba írt körvonal sugarát, ha a rombusz oldala 16 cm, egyik szöge: 1) 30°; 2) 60°!

978. **Határozzátok meg a négyzetbe írt és a négyzet köré írt körvonalak sugarainak arányát!**

979. Egy egyenestől 5 cm-re lévő pontból két ferdét húztak, melyek 45°-os és 30°-os szöget zárnak be az egyenessel. Határozzátok meg:
1) a ferdék hosszát; 2) a ferdék egyenesre eső vetületeit!

980. Az egyeneshez nem tartozó pontból két ferdét húztak, melyek 45°-os szöget zárnak be az egyenessel. Határozzátok meg a ferdék hosszát, ha a talppontjaik közötti távolság 10 cm!

981. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:
1) $2\cos 60° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 60°$; 2) $3\operatorname{tg}^2 60° - 4\cos^2 30°$;
3) $\cos 30° \cdot \operatorname{tg} 30° + \sin 60° \cdot \operatorname{tg} 60°$!

982. Határozzátok meg a következő kifejezések előjelét:
1) $\operatorname{tg} 64° - \operatorname{tg} 58°$; 2) $\sin 21° - \sin 36°$; 3) $\cos 51° - \cos 41°$!

983.* Egy derékszögű háromszögbe írt körvonal sugara 1 cm. Határozzátok meg a háromszög befogóit, ha a háromszög szögei: 1) 30°; 2) 45°!

984.* Egy háromszög egyik szöge 1 cm, rajta fekvő két szög 45° és 60°. Számítsátok ki a háromszög másik két oldalát!

985.* Egy R sugarú körvonal köré egyenlő szárú háromszöget írtak, melynek szárszöge 120°. Mekkorák a háromszög oldalai?

986.* Egy egyenlő szárú trapéz alapjai 6 cm és 10 cm, hegyesszöge 60°. Határozzátok meg:
1) a trapéz szárait; 2) a trapéz magasságát; 3) a trapéz átlóit!

987.* Egy derékszögű trapéz hosszabbik szára 16 cm. A rövidebb átló a 120°-os tompaszög szögfelezője. Számítsátok ki a trapéz területét!

988.* Egy trapéz kerülete 144 cm, a nagyobbik alapon fekvő szögek 60°-osak. A trapéz átlója a középvonalát olyan részekre osztja, melyek közül az egyik 16 cm-rel hosszabb a másik résznél. Határozzátok meg a trapéz alapjait!

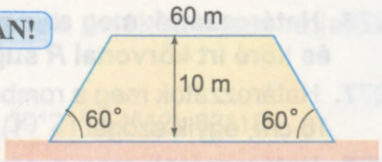
989.* Egy egyenlő szárú trapéz átlója a középvonalát 5 : 9 arányában osztja. A rövidebb alapon fekvő szögek 120°-osak. Határozzátok meg a trapéz szárait, ha a kerülete 220 cm!

990.* Egy paralelogramma tompaszögének csúcsából húzott magasságai 12 cm és 18 cm. Ezek a magasságok 30°-os szöget zárnak be. Határozzátok meg a paralelogramma oldalait!

991.* Egy paralelogramma hegyesszögének csúcsából húzott magasságai 5 cm és 12 cm, melyek hajlásszöge 150°. Határozzátok meg a paralelogramma oldalait!

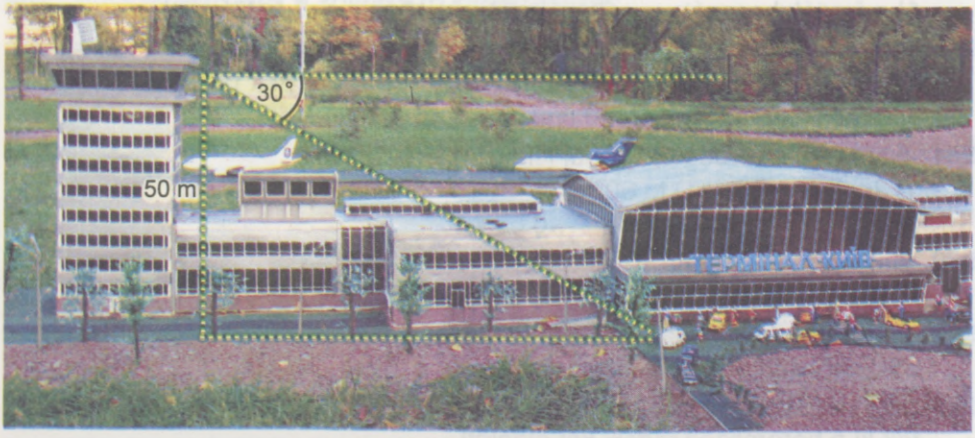
ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

992. Egy autópálya keresztmetszete egyenlő szárú trapéz (480. ábra), az út 60 m széles. Milyen széles a töltés alja, ha a töltés 10 m magas és az oldala 60°-os szöget zár be a föld felszínével?



480. ábra

993. Egy 50 méter magasan álló személy kocsiját 30°-os szög alatt látja (481. ábra). Milyen messze van tőle a személygépkocsija?



481. ábra



24.§. A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK MEGOLDÁSA

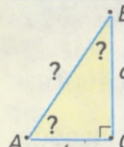
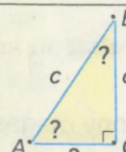
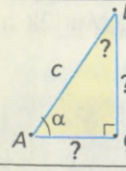
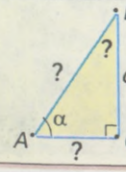
A derékszögű háromszöget megoldani annyit jelent, hogy megadott két oldal, vagy egy oldal és egy szög alapján meghatározzuk a háromszög ismeretlen oldalait és szögeit.

A derékszögű háromszög megoldásakor a következő eseteket kell figyelembe venni:

1) ismert a két befogó;
2) ismert az átfogó és az egyik befogó;
3) ismert az átfogó és az egyik hegyesszög;
4) ismert az egyik befogó és egyik hegyesszög.

Az előbb felsorolt feladatok megoldásainak algoritmusát a 36. táblázatban foglaltuk össze.

36. táblázat

	A feladat feltételei		A feladat megoldásának algoritmusa
1		Adva van: $AC = b$, $BC = a$. Meghatározni: AB, $A\angle$, $B\angle$	1) $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, 2) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, 3) $B\angle = 90° - A\angle$
2		Adva van: $AB = c$, $BC = a$. Meghatározni: AC, $A\angle$, $B\angle$	1) $AC = \sqrt{c^2 - a^2}$, 2) $\sin A = \frac{a}{c}$, 3) $B\angle = 90° - A\angle$
3		Adva van: $AB = c$, $A\angle = \alpha$. Meghatározni: AC, BC, $B\angle$	1) $B\angle = 90° - \alpha$, 2) $AC = c \cdot \cos\alpha$, 3) $BC = c \cdot \sin\alpha$
4		Adva van: $BC = a$, $A\angle = \alpha$. Meghatározni: AB, AC, $B\angle$	1) $B\angle = 90° - \alpha$, 2) $AB = \frac{a}{\sin\alpha}$, 3) $AC = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

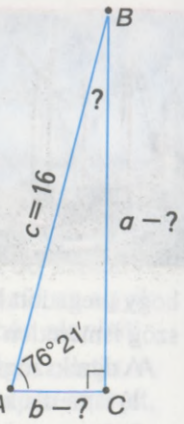
Feladat. Határozzátok meg a derékszögű háromszög ismeretlen oldalait és szögeit, ha az átfogója $c = 16$, hegyesszöge $\alpha = 76°21'$ (482. ábra)!

Megoldás. Ez a feladat a harmadik típusú feladatok közé tartozik. A 36. táblázatban lévő algoritmus szerint:

1) $B\angle = 90° - \alpha = 90° - 76°21' = 13°39'$;

2) $AC = c \cdot \cos\alpha = 16 \cdot \cos 76°21' \approx 16 \cdot 0{,}2360 \approx 3{,}78$;

3) $BC = c \cdot \sin\alpha = 16 \cdot \sin 76°21' \approx 16 \cdot 0{,}9816 \approx 15{,}55$.



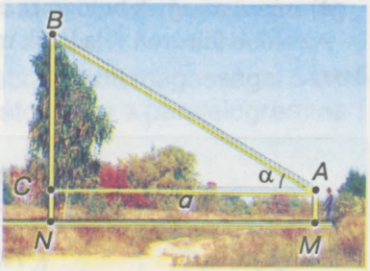
482. ábra

Sok gyakorlati feladat megoldása a derékszögű háromszögek megoldásán alapszik. Vizsgáljunk meg néhány ilyen feladatot!

1. A megközelíthető tárgyak magasságának meghatározása.

Feladat. Határozzuk meg egy fa magasságát (483. ábra)!

Megoldás. A fától meghatározott távolságra, $MN = a$ állítsunk fel valamilyen szögmérő eszközt (például teodolitot), melynek magassága AM. Mérjük meg a fa B csúcsa és az AC vízszintes közötti szöget. Akkor az ABC derékszögű háromszögből $BC = a \cdot \text{tg}\,\alpha$. Figyelembe véve a szögmérő $AM = h$ magasságát, felírhatjuk, milyen képlettel határozhatjuk meg a fa magasságát: $BN = a \cdot \text{tg}\,\alpha + h$. Tételezzük fel, hogy a méréseink eredményeként $a \approx 40$ m, $h = 1{,}5$ m és $\alpha \approx 31°$. Akkor a fa magassága $BN \approx 1{,}5 + 40 \cdot \text{tg}\,31° \approx 1{,}5 + 40 \cdot 0{,}601 \approx 25{,}5$ (m).



483. ábra

2. Olyan tárgyak magasságának meghatározása, melyeket nem lehet megközelíteni.

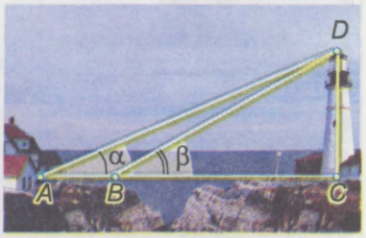
Feladat. Határozzuk meg a folyó túloldalán lévő kilátótorony magasságát (484. ábra)!

Megoldás. Vegyünk fel két A és B pontot a helyszínen! Mérjük meg az $AB = a$ távolságot és az α és β szögeket!

Az ADC és BDC derékszögű háromszögekből: $AC = \frac{DC}{\text{tg}\,\alpha}$, $BC = \frac{DC}{\text{tg}\,\beta}$. Vonjuk ki a két egyenlőség megfelelő oldalait, akkor

$$AC - BC = \frac{DC}{\text{tg}\,\alpha} - \frac{DC}{\text{tg}\,\beta}.$$

Innét $AB = DC \cdot \frac{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$



484. ábra

Tehát $DC = \frac{a \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$.

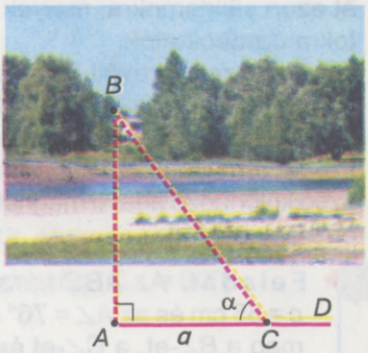
A DC magassághoz adjuk hozzá a teodolit $AM = BN = h$ magasságát, és megkapjuk a kilátótorony magasságát: $DK = \frac{a \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} + h$.

Számítsuk ki a torony magasságát, ha a méréseink szerint $a \approx 10$ m, $h \approx 1{,}5$ m, $\alpha \approx 35°$ és $\beta \approx 40°$!

Akkor $DK = \frac{10 \cdot \operatorname{tg}35° \cdot \operatorname{tg}40°}{\operatorname{tg}40° - \operatorname{tg}35°} + 1{,}5 \approx \frac{10 \cdot 0{,}7002 \cdot 0{,}8391}{0{,}8391 - 0{,}7002} + 1{,}5 \approx 43{,}8$ (m).

3. Olyan tárgyak közötti távolság meghatározása, melyeket átjárhatatlan akadály választ el egymástól.

Feladat. Határozzuk meg a folyó két partján lévő A és B pont között a távolságot (485. ábra)!

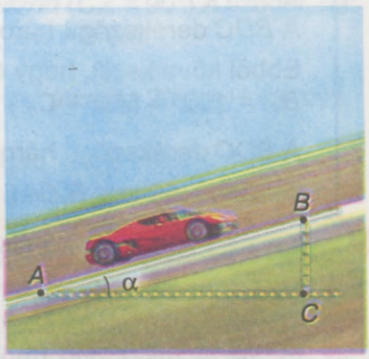


485. ábra

Megoldás. Húzzunk az AB egyenesre merőleges AD egyenest, $AD \perp AB$. Az AD egyenesen jelöljünk meg egy C pontot. Mérjük meg az AC távolságot és az α szöget. Az ABC derékszögű háromszögből könnyen meghatározható az A és a B pont közötti távolság: $AB = a \cdot \operatorname{tg}\alpha$.
Ha a mérések eredménye szerint $a = 50$ m, $\alpha = 72°$, akkor $AB = 50 \cdot \operatorname{tg}72° \approx 50 \cdot 3{,}0777 \approx 154$ (m).

4. Feladatok szögek meghatározására (lejtő, emelkedő meredeksége, látószög).

Feladat. Határozzuk meg, mennyire meredek a 200 m hosszú és 8 m magas közúti emelkedő!



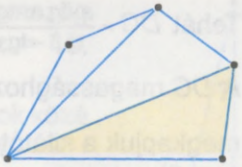
486. ábra

Megoldás. A 486. ábrán az α szöggel jelöltük az út meredekségét. AC a vízszintes út. Húzzunk BC merőlegest az AC-re, BC az út magassága. Az adatok alapján $AB = 200$ m, $BC = 8$ m. Az α szöget az ABC derékszögű háromszögből határozzuk meg: $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{200} = 0{,}004$.

Akkor $\alpha \approx 2°18'$.

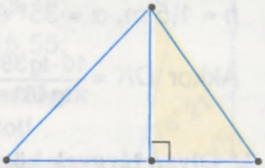
TUDJATOK TÖBBET!

Felmerülhet bennetek az a kérdés, *miért kell ilyen nagy figyelmet fordítani a derékszögű háromszögre, mikor a környezetünkben ritkán találkozhatunk ilyen alakú tárgyakkal.*



487. ábra

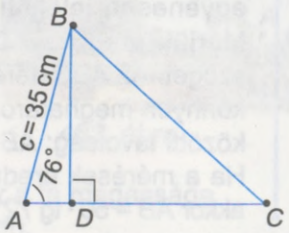
Próbáljunk választ kapni a kérdésünkre. Mint a kémiában is, először a különböző elemekkel ismerkedünk meg, és majd csak később azok kötéseivel, a biológiában is, először az egysejtűeket tanulmányozzátok, majd később a többsejtű szervezeteket, a mértan is először az egyszerű alakzatokat, a pontot, a szakaszt, a háromszöget vizsgálja, majd azok ismeretében tér át azon síkidomokra, melyek ilyen egyszerű alakzatokra darabolhatók.



488. ábra

Ezen alakzatok között kiemelt helyet kap a derékszögű háromszög. Mint tudjuk, bármely síkidom feldarabolható háromszögekre (487. ábra). A háromszögek adataiból meghatározható az eredeti síkidom minden adata. Viszont minden háromszöget a magassága két derékszögű háromszögre bontja (488. ábra). A háromszög különböző adatai meghatározhatók a derékszögű háromszögekből. Nézzünk erre egy példát!

Feladat. Az ABC háromszögben $b = 50$ cm, $c = 35$ cm és az $A\angle = 76°$ (489. ábra). Határozzuk meg a $B\angle$-et, a $C\angle$-et és az a oldalt!



$b = 50$ cm

489. ábra

Megoldás. Húzzuk meg a háromszög BD magasságát! A D pont az A és C pont közé esik, mivel $A\angle$ hegyesszög és $b > c$.

Az ABD derékszögű háromszögből:

$BD = c \cdot \sin A = 35 \cdot \sin 76° \approx 35 \cdot 0{,}9703 \approx 40$ (cm).

$DC = AC - AD = b - c \cdot \cos A = 50 - 35 \cdot \cos 76° \approx$

$\approx 50 - 35 \cdot 0{,}2419 \approx 50 - 8{,}4665 \approx 42$ (cm).

A BDC derékszögű háromszögből: $\operatorname{tg} C = \frac{BD}{DC} \approx \frac{40}{42} \approx 0{,}9524$.

Ebből következik, hogy $C\angle \approx 43{,}6° \approx 43°$.

$B\angle = 180° - (A\angle + C\angle) \approx 180° - (76° + 43°) \approx 180° - 119° \approx 61°$.

A BDC derékszögű háromszögből: $a = \frac{BD}{\sin C} = \frac{40}{\sin 43°} \approx \frac{40}{0{,}6820} \approx 59$ (cm).

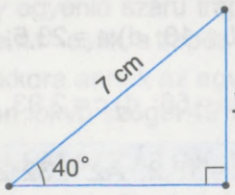
Tehát $a \approx 59$ cm, $B\angle \approx 61°$, $C\angle \approx 43°$.

EMLÉKEZZETEK A FONTOSAKRA!

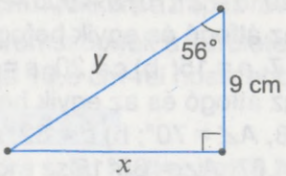
1. Mit jelent a *derékszögű háromszög megoldása*?
2. Milyen típusú feladatokat sorolunk a derékszögű háromszög megoldásához?
3. Írjátok fel mindegyik típus megoldási algoritmusát!
4. Soroljatok fel néhány témakörhöz kapcsolódó feladatot!

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

994'. A 490. és 491. ábra adatai alapján határozzátok meg x és y értékét!

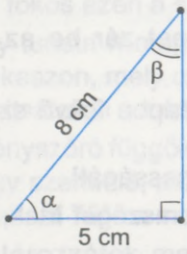


490. ábra

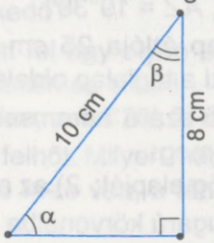


491. ábra

995'. A 492. és 493. ábra adatai alapján határozzátok meg α és β értékét!



492. ábra



493. ábra

996°. Határozzátok meg az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$):
1) BC oldalát, ha $AB = 5$ cm, $A\angle = 55°$;
2) AB oldalát, ha $AC = 7$ cm, $B\angle = 41°$;
3) AC oldalát, ha $BC = 6$ cm, $B\angle = 38°$!

997°. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen oldalait, ha
1) egyik befogója 9 cm, a befogóval szemközti szöge 38°;
2) egyik befogója 10 cm, a befogó melletti szöge 54°!

998°. Egy derékszögű háromszög átfogója 14 cm, egyik hegyesszöge 65°. Határozzátok meg 1) az adott szög melletti befogóját;
2) az adott szöggel szemközti befogóját!

999°. Határozzátok meg az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) A szögét, ha:
1) $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm; 2) $AB = 10$ cm, $AC = 6$ cm;
3) $AC = 8$ cm, $BC = 16$ cm!

1000°. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 14 cm, átfogója 20 cm. Határozzátok meg: 1) az adott befogó melletti szöget;
2) az adott befogóval szemközti szöget!

1001°. Egy derékszögű háromszög befogója az átfogó 0,2-szerese. Határozzátok meg a háromszög szögeit!

1002°. Határozzátok meg a téglalap átlójának és hosszabbik oldalának hajlásszögét, ha az oldalai: 1) 6 cm és 8 cm; 2) 18 cm és 20 cm; 3) 7 cm és 14 cm!

1003°. A 45 cm sugarú körvonalhoz az A ponton keresztül AB és AC érintőt húztak (B és C az érintési pont). Határozzátok meg az érintők hajlásszögét, ha:
1) $AB = 60$ cm; 2) $AB = 50$ cm; 3) $AB = 45$ cm!

1004. Határozzátok meg az alábbi adatokból a derékszögű háromszög ismeretlen oldalait és szögeit:

1) adott két befogó:

a) $a = 20$, $b = 21$; b) $a = 9$, $b = 12$; c) $a = 24$, $b = 18$; d) $a = 23{,}5$, $b = 40{,}2$;

2) adott az átfogó és egyik befogó:

a) $c = 17$, $a = 15$; b) $c = 20$, $a = 16$; c) $c = 65$, $a = 56$; d) $c = 2{,}93$, $a = 2{,}85$;

3) adott az átfogó és az egyik hegyesszög:

a) $c = 8$, $A\angle = 70°$; b) $c = 82$, $A\angle = 42°$; c) $c = 18{,}2$, $A\angle = 32°20'$;

d) $c = 4{,}67$, $A\angle = 65°15'$;

4) adott egyik befogója és a befogó melletti szöge:

a) $a = 12$, $A\angle = 32°$; b) $a = 18$, $A\angle = 17°$; c) $a = 12$, $A\angle = 53°20'$;

d) $a = 3{,}71$, $A\angle = 19°30'$!

1005. Egy téglalap átlója 25 cm és 36°18'-es szöget zár be az oldallal. Számítsátok ki a téglalap oldalait!

1006. Egy egyenlő szárú háromszög szára 12 cm, alapon fekvő szöge 75°. Határozzátok meg:

1) a háromszög alapját; 2) az alaphoz tartozó magasságát!

1007. Egy 5 cm sugarú körvonalba egyenlő szárú háromszöget írtak, melynek szárszöge 70°. Határozzátok meg:

1) a háromszög alaphoz tartozó magasságát;

2) a háromszög szárát!

1008. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 25 cm, a szárhoz tartozó magassága 21 cm. Határozzátok meg:

1) a háromszög szárát; 2) a szárszöget!

1009. Az ABC derékszögű háromszögben ($C\angle = 90°$) $A\angle = 27°$, $BC = 21$ cm. Határozzátok meg:

1) az ismeretlen befogót; 2) az átfogót; 3) a befogók átfogóra eső vetületeit!

1010. Az egyenestől 15 cm-re lévő pontból két ferdét húztak, melyek 24°-os és 61°-os szöget zárnak be az egyenessel. Határozzátok meg:

1) a ferdék hosszát; 2) a ferdék egyenesre eső vetületeit!

1011. Határozzátok meg annak a rombusznak a területét, melynek oldala 7,5 cm, hegyesszöge 22°!

1012. Egy paralelogramma oldalai 5 cm és 8 cm, hegyesszöge 36°. Határozzátok meg a paralelogramma magasságait!

1013. Egy rombusz oldala 64,5 cm, hegyesszöge 28°30'. Határozzátok meg a rombusz átlóit!

1014.* Egy téglalap átlóinak hajlásszöge 46°, területe 545 cm^2. Határozzátok meg a téglalap oldalait!

1015.* Egy trapéz nagyobbik alapján lévő szögei 16° és 54°, a trapéz magassága 24 cm, rövidebb alapja 18 cm. Számítsátok ki a nagyobbik alapot!

1016.* Egy trapéz alapjai 15 cm és 20 cm, a szára 10 cm és 48°-os szöget zár be a hosszabbik alappal. Mekkora a trapéz területe?

1017.* Egy egyenlő szárú trapéz hosszabbik alapja 8 cm, ezen az alapon fekvő szögei 41°-osak, a trapéz magassága 2 cm. Mekkora a trapéz rövidebb alapja?

1018.* Mekkora annak az egyenlő szárú háromszögnek a kerülete, melynek az alapon fekvő szögei 49°54' és az alapja 10,8 cm-rel hosszabb a száránál?

ALKALMAZZÁTOK A GYAKORLATBAN!

1019. A 9 m-es oszlop árnyéka 5 m. Mekkora szög alatt esnek a Nap sugarai a föld felszínére?

1020. A hegyi vasútvonal az egyik hágón minden 60 m-en 1 m-t emelkedik. Hány fokos ezen a szakaszon az emelkedő?

1021. Egy turista h magasságra emelkedett fel egy olyan egyenes n hosszú útszakaszon, mely α szöget zár be a vízszintes síkkal. Számítsátok ki a h értékét, ha: 1) $n = 1{,}5$ km, $\alpha = 4°30'$; 2) $n = 3$ km, $\alpha = 8°18'$!

1022. A fényszóró függőleges sugara eléri a felhőt. Milyen magasan van a felhő, ha egy szemlélő, aki a fényszórótól 600 m-re van, a fénysugár és a felhő metszését 75°-os szög alatt látja?

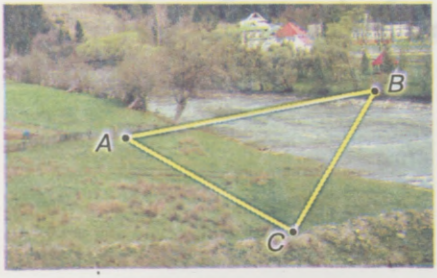
1023. Határozzátok meg az A és a B pont közötti távolságot (B pont megközelíthetetlen), ha $AC = 60$ m, $BAC\angle = 41°$, $ACB\angle = 90°$ (494. ábra)!

1024. Egy szanatóriumot a hegy tetejére építettek. A szanatóriumhoz 1500 m hosszú, 5°-os emelkedő vezet. Milyen magasan van a szanatórium a hegy lábától?

1025. Az árbocrudat három egyenlő hosszú drótkötéllel kötötték ki, melyek 64°-os szöget zárnak be a vízszintes síkkal. A drótok alsó végei 35 m-re vannak az árboctól. Milyen magasan kötötték ki a drótot az árbochoz?

1026. A repülőgépek kifutójától nyolcszáz méterre 20 m magas fák nőnek. Milyen szög alatt kell felszállni a repülőgépnek, hogy ne érintse a fák tetejét?

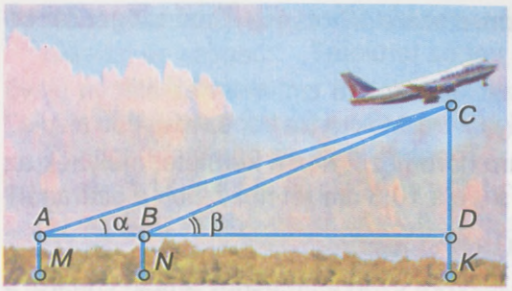
1027.* Határozzátok meg hány fokos annak az utcának az emelkedése, melyen egy 40 m hosszú iskolaépület áll és az épület fundamentuma az elején 180 cm, a végén 90 cm (495. ábra)!



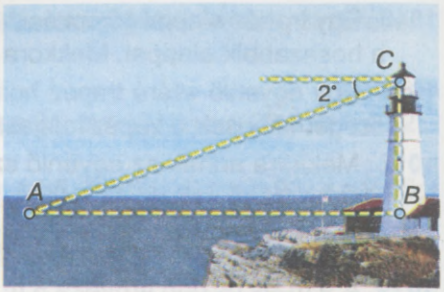
494. ábra



495. ábra



496. ábra



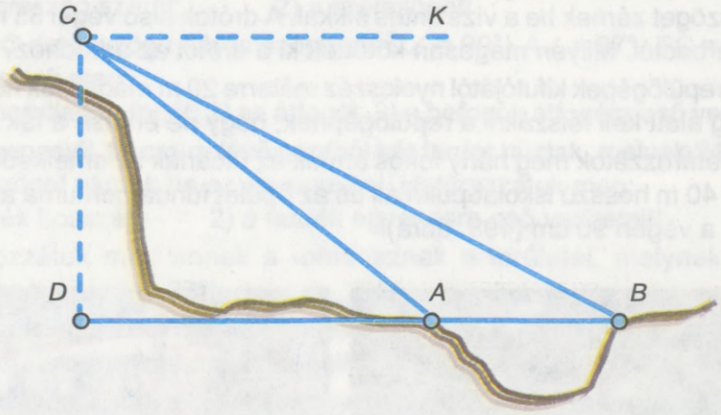
497. ábra

1028*. Ahhoz, hogy meghatározzák egy repülőgép C repülési magasságát (496. ábra), két különböző M és N pontban szögmérőket állítottak fel, majd megmérték az $MN = a$ távolságot! Akkor, amikor az A, B és C pontok egy függőleges síkban vannak, megmérték az α és β szögeket. Ismerve az a távolságot, az α és β szögeket valamint a szögmérő magasságát, meghatározták a CK magasságot!

Magyarázzátok meg a mérési eredmény helyességét! Határozzátok meg, milyen magasan repült a gép, ha $a = 80$ m, $h = 1{,}5$ m, $\alpha = 39°$ és $\beta = 44°$!

1029*. Egy 75 m magas világítótorony tetejéről egy hajó a vízszinteshez viszonyítva 2°-os szög alatt látszik (497. ábra). Milyen távol van a hajó?

1030*. A 498. ábrán egy bejárhatatlan AB távolság hosszának meghatározását vázolja. Magyarázzátok meg az eljárás helyességét! Határozzátok meg az AB távolságot, ha $CD = 200$ m, $KCB\angle = 28°$, $KCA\angle = 39°$!



498. ábra

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a Pitagorasz-tételt!
2. Soroljátok fel a ferdék tulajdonságait!
3. Hogyan értelmezhető a derékszögű háromszög hegyesszögének szinusza, koszinusza és tangense?
4. Hogyan határozhatók meg a derékszögű háromszög ismeretlen oldalai, ha ismert egyik oldala és egyik hegyesszöge?
5. Hogyan határozhatók meg a derékszögű háromszög hegyesszögei ismert két oldala alapján?
6. Soroljátok fel a derékszögű háromszög különböző adatai meghatározásának típusfeladatait, és mindegyik esetre mondjátok el a feladat megoldásának algoritmusát!

Olvassátok el figyelmesen a feladatokat, és az alábbiak közül jelöljétek ki a helyes válaszokat! A rendelkezésetekre álló idő 10–15 perc.

1. feladat

1° Határozzátok meg annak a téglalapnak az átlóját, melynek oldalai 9 cm és 12 cm!

A. 21 cm. **B.** 3 cm. **C.** 20 cm. **D.** 15 cm.

2° Határozzátok meg annak az egyenlő szárú háromszögnek a szárát, melynek alapja 10 cm, magassága 12 cm!

A. 22 cm. **B.** 14 cm. **C.** 13 cm. **D.** 15 cm.

3° Az egyeneshez nem tartozó pontból húzott ferde hossza 8 cm. A ferde 60°-os szöget zár be az egyenessel. Határozzátok meg a ferde egyenesre eső vetületének hosszát!

A. 4 cm. **B.** 2 cm. **C.** 6 cm. **D.** 16 cm.

4 Egy derékszögű háromszög befogóinak az aránya 3 : 4, átfogója 10 cm. Számítsátok ki a befogók hosszát!

A. 3 cm és 4 cm. **B.** 30 cm és 40 cm. **C.** 6 cm és 8 cm. **D.** 4 cm és 6 cm.

5* Egy derékszögű trapéz alapjai 5 cm és 17 cm, hosszabbik szára pedig 15 cm. Számítsátok ki a trapéz kisebbik átlóját!

A. 12 cm. **B.** 13 cm. **C.** 22 cm. **D.** 20 cm.

2. feladat

1° Határozzátok meg annak a derékszögű háromszögnek a befogóját, melyben a befogóval szembeni szög szinusza 0,6, átfogója pedig 10 cm!

A. 6 cm. **B.** 16 cm. **C.** 4 cm. **D.** 60 cm.

2° Határozzátok meg annak a derékszögű háromszögnek az átfogóját, melynek egyik befogója 8 cm, a befogó és az átfogó 60°-os szöget zár be!

A. 10 cm. **B.** 48 cm. **C.** 14 cm. **D.** 16 cm.

3° Egy téglalap átlója 2 cm és 30°-os szöget zár be az oldalával. Számítsátok ki a téglalap oldalainak hosszát!

A. 1 cm és $\sqrt{3}$ cm. **B.** 2 cm és 1 cm. **C.** 2 cm és $\sqrt{3}$ cm. **D.** 3 cm és 1 cm.

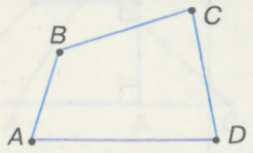
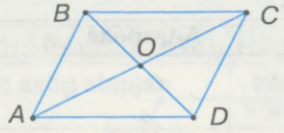
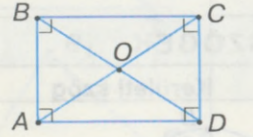
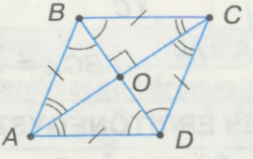
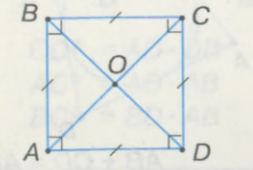
4 Egy egyenlő szárú háromszög magassága h, szárszöge α! Mekkora az alapja?

A. $h \cdot \sin \alpha$. **B.** $h \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. **C.** $2h \cdot \operatorname{tg} \alpha$. **D.** $2h \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

5* Egy 12 m magas oszlopnak 5 m-es az árnyéka. Hány fokos szög alatt látszik a Nap?

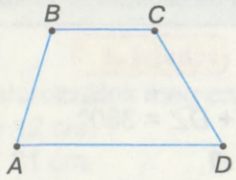
A. 35°. **B.** 67°. **C.** 87°. **D.** 76°.

NÉGYSZÖGEK

NÉGYSZÖG	
	$A\angle + B\angle + C\angle + D\angle = 360°$
Paralelogramma	**Tulajdonságai**
 $AD \parallel BC,\ AB \parallel DC$	**1.** $AB = DC,\ AD = BC$ **2.** $A\angle = C\angle,\ B\angle = D\angle$ **3.** $AO = OC,\ BO = OD$ **4.** $A\angle + B\angle = 180°,\ A\angle + D\angle = 180°$
A paralelogramma fajtái	**Tulajdonságai**
Téglalap  $A\angle = B\angle = C\angle = D\angle = 90°$	**paralelogramma** **1.** $AB = DC,\ AD = BC$ **2.** $A\angle = C\angle,\ B\angle = D\angle$ **3.** $AO = OC,\ BO = OD$ **4.** $A\angle + B\angle = 180°,\ A\angle + D\angle = 180°$ **Jellegzetes tulajdonság** **5.** $AC = BD$
Rombusz  $AB = BC = CD = DA$	**paralelogramma** **1.** $AB = DC,\ AD = BC$ **2.** $A\angle = C\angle,\ B\angle = D\angle$ **3.** $AO = OC,\ BO = OD$ **4.** $A\angle + B\angle = 180°,\ A\angle + D\angle = 180°$ **Jellegzetes tulajdonság** **5.** $AC \perp BD$ **6.** $ABD\angle = CBD\angle,\ BAC\angle = DAC\angle$
Négyzet 	**A paralelogramma, a téglalap és a rombusz összes tulajdonsága**

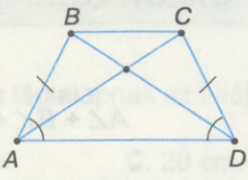
TRAPÉZ

Nem egyenlő szárú



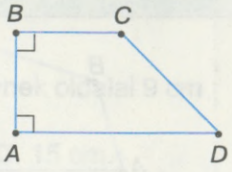
$AB \neq CD$

Egyenlő szárú



$AB = CD, A\angle = D\angle$

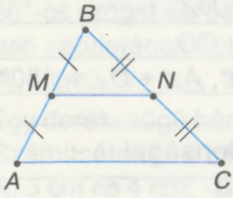
Derékszögű



$A\angle = B\angle = 90°$

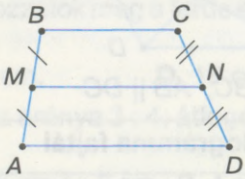
KÖZÉPVONAL

A háromszögé



$MN \parallel AC, MN = \frac{AC}{2}$

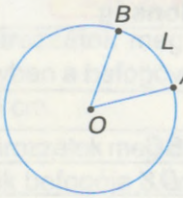
A trapézé



$MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \frac{AD+BC}{2}$

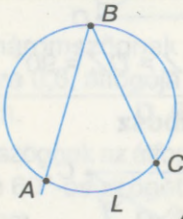
A KÖRVONALBA ÍRT SZÖGEK

Középponti szög



$ALB\cup = AOB\angle$

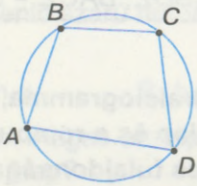
Kerületi szög



$ABC\angle = \frac{1}{2} ALC\cup$

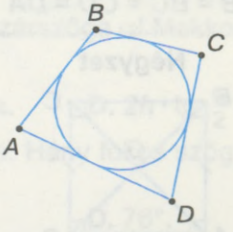
BEÍRT ÉS KÖRÜLÍRT NÉGYSZÖGEK (HÚR- ÉS ÉRINTŐNÉGYSZÖGEK)

Húrnégyszög



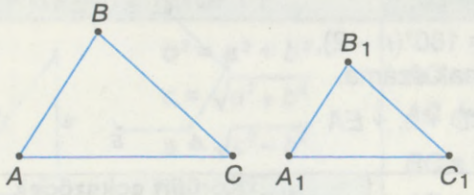
$A\angle + C\angle = 180°, B\angle + D\angle = 180°$

Érintőnégyszög



$AB + CD = AD + BC$

HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGA

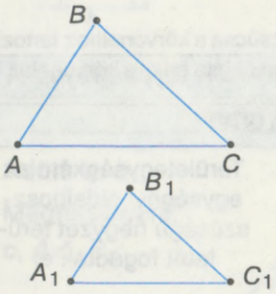


$A\angle = A_1\angle$, $B\angle = B_1\angle$, $C\angle = C_1\angle$,
$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$

$ABC\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle$

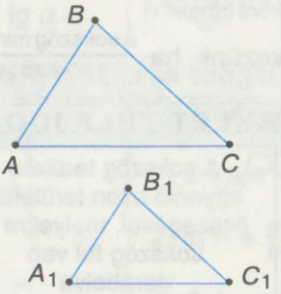
HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGÁNAK ISMERTETŐJELEI

két szög alapján



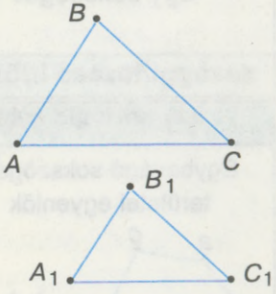
$A\angle = A_1\angle$, $C\angle = C_1\angle$

két oldal és az általuk közbezárt szög alapján



$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$,
$A\angle = A_1\angle$

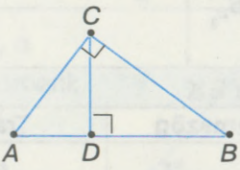
három oldal alapján



$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 =$
$= AC : A_1C_1$

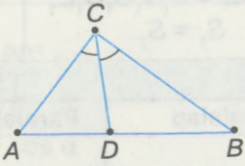
ARÁNYOS SZAKASZOK

a derékszögű háromszögben



$CD^2 = AD \cdot DB$
$AC^2 = AD \cdot AB$
$BC^2 = BD \cdot AB$

a szögfelező tulajdonsága

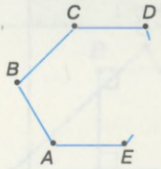


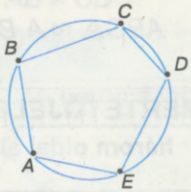
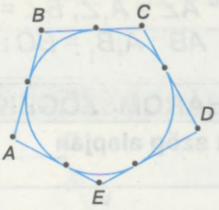
$AD : BD = AC : BC$

SOKSZÖGEK. A SOKSZÖGEK TERÜLETE

$A\angle + B\angle + C\angle + ... + E\angle = 180°(n-2)$,
ahol n a sokszög oldalainak száma.

Kerülete $P = AB + BC + CD + ... + EA$

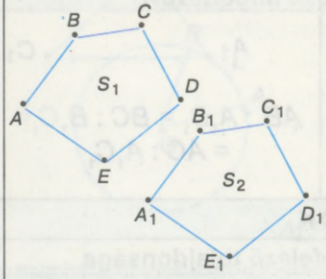


Beírt sokszögek	Körülírt sokszögek
	

Egy sokszöget $\frac{\text{körbe írtnak}}{\text{kör köré írtnak}}$, nevezünk, ha $\frac{\text{a sokszög minden csúcsa a körvonalhoz tartozik}}{\text{a sokszög minden oldala érinti a körvonalat}}$

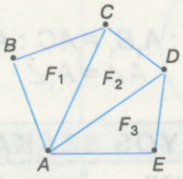
A TERÜLET TULAJDONSÁGAI

Egybevágó sokszögek területei egyenlők



$ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1$
$S_1 = S_2$

A sokszög területe egyenlő azon területek összegével, melyekre a sokszög fel van darabolva

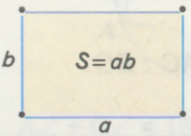
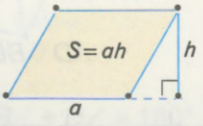
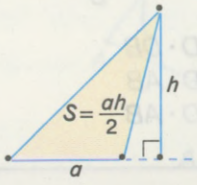
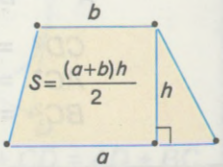


$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

Területegységként az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területét fogadták el

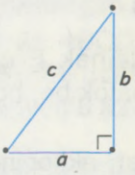


TERÜLETKÉPLETEK

Téglalap	Paralelogramma	Háromszög	Trapéz
			

DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK MEGOLDÁSA

Pitagorasz-tétel



$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

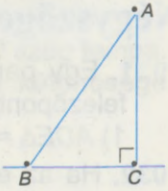
Következmények

AC merőleges

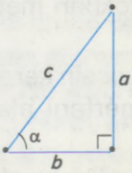
AB ferde

BC a ferde vetülete

$AB > AC$, $AB > BC$



A derékszögű háromszögek oldalai és szögei közötti összefüggések



$\frac{a}{c} = \sin\alpha$

$\frac{b}{c} = \cos\alpha$

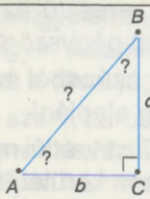
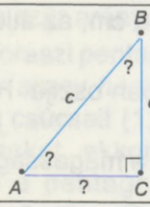
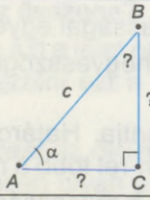
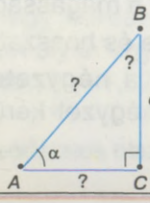
$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$

$a = c \cdot \sin\alpha$, $b = c \cdot \cos\alpha$, $a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$

$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha}$

$b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

A derékszögű háromszögek oldalai és szögei közötti összefüggések

Feladat	A megoldás algoritmusa
Adott: *a*, *b* Meghatározni: *c*, *A*∠, *B*∠ 	1) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 2) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, 3) $B\angle = 90° - A\angle$
Adott: *a*, *c* Meghatározni: *b*, *A*∠, *B*∠ 	1) $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, 2) $\sin A = \frac{a}{c}$, 3) $B\angle = 90° - A\angle$
Adott: *c*, α Meghatározni: *a*, *b*, *B*∠ 	1) $B\angle = 90° - \alpha$, 2) $a = c \cdot \sin\alpha$, 3) $b = c \cdot \cos\alpha$
Adott: *a*, α Meghatározni: *c*, *b*, *B*∠ 	1) $B\angle = 90° - \alpha$, 2) $c = \frac{a}{\sin\alpha}$, 3) $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

OLDJÁTOK MEG A FELADATOKAT!

Négyszögek

1031. Egy paralelogramma AB és CD szemben fekvő oldalainak E és F felezőpontjait összekötötték a B és D csúcsokkal. Bizonyítsátok be, hogy: 1) $ADE\Delta = CBF\Delta$; 2) $DE \parallel FB$!

1032. Ha az előző feladatban összekötjük az E és F pontokat, akkor négy egybevágó háromszöget kapunk. Bizonyítsátok be!

1033. Egy paralelogramma oldalai 3 cm és 5 cm. A rövidebb oldalon lévő szögek szögfelezői a szemben lévő oldal egyenesét M és N pontokban metszik. Mekkora az MN szakasz hossza?

1034. Egy paralelogramma átlói d_1 és d_2. A paralelogramma csúcsain keresztül az átlókkal párhuzamos egyeneseket húztak. Milyen mértani alakzat keletkezett? Mekkora a kerülete?

1035. Egy paralelogrammában a 120°-os tompaszög szögfelezője az oldalát 24 cm-es és 16 cm-es részekre osztja a hegyesszögtől számítva. Mekkora szakaszokra osztja ez a szögfelező az átlót?

1036. Egy paralelogramma oldalfelező pontjain keresztül az oldalakra merőleges egyeneseket húztak. Milyen fajtájú a kapott négyszög?

1037. Szerkesszetek paralelogrammát egy csúcsból húzott két, h_1 és h_2 magassága, valamint a köztük lévő α szög alapján!

1038. Egy paralelogramma oldalainak aránya 7 : 11, átlói megfelelően 24 cm és 28 cm. Határozzátok meg a paralelogramma kerületét!

1039. Egy paralelogramma oldalai 10 cm és 15 cm, az átlók különbsége 2 cm. Mekkorák az átlók?

1040. Egy téglalap átlója a szöget 2 : 3 arányban osztja. Határozzátok meg az átlók hajlásszögét!

1041. Határozzátok meg annak a rombusznak a magasságát, melynek oldala a és tompaszöge 150°!

1042. Bizonyítsátok be, hogy α rombusz magasságai egyenlők!

1043. Számítsátok ki annak a rombusznak a hegyesszögét, melynek kerülete 16 cm, magassága 2 cm!

1044. A rombuszt átlója két háromszögre bontja. Határozzátok meg az átló hosszát, ha a háromszögek kerülete 15 cm-rel több a rombusz kerületénél!

1045. Szerkesszetek rombuszt $2p$ kerülete és h magassága alapján!

1046. Szerkesszetek rombuszt α hegyesszöge és hosszabbik d átlója alapján!

1047. Az átlók négy háromszögre bontják a négyzetet. A háromszögek kerületének összege 20 cm-rel több a négyzet kerületénél. Mekkora a négyzet átlója?

1048. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú trapéz átlói négyzetének összege egyenlő az alapok szorzatának és a szár négyzetének összegével!

1049. Egy egyenlő szárú trapéz rövidebb alapja egyenlő a szárral. Az átló pedig merőleges a szárra. Mekkorák a trapéz szögei?

1050. Az $ABCD$ trapéz alapjai AD és BC, az A szög hegyes, a D szög tompa. Bizonyítsátok be, hogy a szárak alapra eső vetületeinek különbsége egyenlő az alapok különbségével!

Háromszögek hasonlósága

1051. Egy szakaszt az *aranymetszés* arányában osztottak két részre, ha a szakasz hosszabb része úgy aránylik a kisebbikhez, mint az egész szakasz a hosszabb részhez. Ez körülbelül 1,62. Hogy megszerkesszük az AB szakasz aranymetszését, az AB szakaszra, mint befogóra szerkesszünk derékszögű ABC háromszöget ($BC < AB$). Az AC átfogóra mérjük fel a $CM = BC$ szakaszt, az AB befogóra az $AO = CM$ szakaszt. Az O pont az AB szakaszt az *aranymetszés arányában* osztja. Végezzétek el a szerkesztést a fentiek szerint, mérjétek meg a kapott szakaszok hosszát, majd ellenőrizzétek, hogy teljesült-e az *aranymetszés szabálya*!

1052. Az *aranymetszést* már ősidők óta az emberi test szépségideáljának meghatározásakor figyelembe vették. Ilyen arány van a sarok és a leengedett kéz középsőujjbegye, valamint az ujjbegy és a fejtető között. Mérjétek meg magatokon ezeket a távolságokat, és határozzátok meg az arányukat!

1053. Azt az egyenlő szárú háromszöget, melynek az alapon fekvő szöge 72°, *arany háromszögnek* nevezik, mert a szár és az alap aránya megközelítőleg 1,62. Rajzoljatok ilyen háromszöget, végezzetek méréseket és határozzátok meg az alap és a szár arányát!

1054. Az ismert pitagoraszi pentagramma[1] (a pitagoreusok jelvénye) egy ötágú csillag, mely egy *arany háromszöggel* van összekapcsolva. Ha megszámozzuk a csillag csúcsait (1, 2, 3, 4, 5) és összekötjük az 1 – 3 – 5 vagy 2 – 4 – 1 csúcsokat, akkor *arany háromszögeket* kapunk. Hány ilyen háromszög van a pentagrammában? Mennyi az összes háromszög szárszögeinek az összege?

1055. A pitagoreusok ezt a jelet rajzolták a homokba, hogy felismerjék egymást. Hogyan kell lerajzolni ezt a jelet úgy, hogy ne emeljétek fel a ceruzát a papírlapról?

1056. Az *aranymetszést* az ókori Egyiptomban is ismerték. Ha a Kheopsz piramist függőlegesen olyan síkkal metszik, mely a csúcson és az alapélek felezőpontján megy keresztül, úgynevezett dupla arany háromszöget kapunk. A metszet olyan egyenlő szárú háromszög, melynek a területe és az alapterület aránya $\approx 1{,}62$. A Kheopsz piramisban a háromszög szára

[1] Pentagramma – csodálatos ötszög.

186,526 m, alapja 230,4 m. Ellenőrizzétek le az előző megállapítás helyességét, teljesül-e az *aranymetszés szabálya*? Rajzoljatok olyan háromszöget, melyben az oldalak aránya megegyezik a Kheopsz piramis arányaival. Igaz-e, hogy az alapon fekvő szögek 51°51'?

1057. A 10 cm és 16 cm oldalhosszúságú téglalapot *arany* téglalapnak nevezik, mert oldalai aránya egyenlő az aranymetszés arányával. Ha ebből a téglalapból levágunk egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetet, akkor szintén *arany* téglalapot kapunk. Milyen oldalhosszúságú négyzetet kell levágni a kapott téglalapból, hogy ismét *arany* téglalapot kapjunk? Általánosítsátok a szabályt!

1058. Egy derékszögű háromszög egyik befogóját a derékszög csúcsánál meghosszabbították egy szakasszal. A szakasz végpontjából merőlegest húztak az átfogóra. A kapott háromszögek közül melyek hasonlók az eredeti háromszöggel?

1059. Egy háromszög csúcsaiba kívülről merőleges egyeneseket bocsátottak egymás után az oldalaira. Az egyenesek metszéspontjai egy háromszöget alkotnak. Hasonló-e az így kapott háromszög az eredetivel? A feletetet magyarázzátok meg!

1060. A háromszög külső szögeinek szögfelezői egy háromszöget alkotnak. A kapott háromszög hasonló-e az eredetivel? A feleletet indokoljátok meg!

1061. Az *ABCK* és *MKTP* közös *K* csúcsú egybevágó négyzetek. A *CK* és *KT* oldalak kölcsönösen merőlegesek. Határozzátok meg az *ACTM* négyszög területét, ha *AB* = 6 cm!

1062. Egy paralelogramma hegyesszögeinek csúcsaiból meghúzták a magasságokat. Hasonlóak-e a kapott háromszögek?

1063. *Ptolemaiosz feladata*. Bizonyítsátok be, hogy a húrnégyszögek átlóinak szorzata egyenlő a szemben fekvő oldalak szorzatainak összegével!

1064. Mekkora annak az egyenlő szárú trapéznak az átlója, melynek alapjai 3 cm és 5 cm, szára 7 cm?

1065. A 6 cm sugarú körvonalon kívül fekvő *M* ponton keresztül két érintőt húztak. Határozzátok meg az érintési pontok közötti távolságot, ha az *M* pont 10 cm-re van a körvonal középpontjától!

1066. A körbe írt *ABC* háromszögben meghúzták a *C* szög szögfelezőjét. A szögfelező félegyenesének és a körvonalnak a metszéspontját összekötötték az *A* csúccsal.

1) A kapott háromszögek között melyek hasonlók?

2) Fejezzétek ki a háromszög szögfelezőjének négyzetét az *a* és a *b* oldalon, valamint a *c* oldal részein keresztül!

1067. Határozzátok meg a 3 cm, 4 cm és 5 cm oldalhosszúságú háromszög legnagyobb szögének szögfelezőjét!

1068. Hogyan kell megszerkeszteni az *a* és *b* szakaszok negyedik arányos szakaszát?

1069. Szerkesszetek háromszöget P kerülete valamint α és β hegyesszögei alapján!

1070. Az ABC háromszögbe írjatok úgy négyzetet, hogy két csúcsa rajta legyen a háromszög legnagyobb oldalán, a másik két csúcsa pedig a másik két oldalon!

Sokszögek. A sokszögek területe

1071. Régen a körzőt *hatodolónak* nevezték. Az elnevezést onnét kapta, hogyha a körzőnyílás egyenlő a körvonal sugarával, akkor a körzővel hat egyenlő részre lehet osztani a körvonalat. Ellenőrizzétek le!

1072. Egy hatszög szögei páronként egyenlők. Az egyik szög 120°, két másik szög aránya 7 : 9. Határozzátok meg a hatszög szögeit!

1073. Egy téglalap oldalainak az aránya 8 : 15, átlója 34 cm. Mekkora a téglalap területe?

1074. Egy paralelogramma egyik oldala 10 cm, egyik szöge 30°. Határozzátok meg a paralelogramma területét, ha a kerülete 56 cm!

1075. Egy rombuszba körvonalat írtak. A rombusz oldala 4 cm, a körvonal sugara 1,5 cm. Mekkora a rombusz területe?

1076. Egy háromszög magassága 4 cm. A magasság talppontja az oldalt 1 : 8 arányban osztja. Határozzátok meg annak a szakasznak a hosszát, mely párhuzamos a magassággal, végpontjai a háromszög oldalain vannak és a háromszöget két egyenlő területű részre bontja!

1077. Egy háromszög legnagyobb és legkisebb oldala 6 cm és 13 cm. Határozzátok meg a harmadik oldal hosszát, ha a legrövidebb magassága négyzetének háromszorosa egyenlő a másik két oldal szorzatával!

1078. Egy trapéz magassága háromszor hosszabb a kisebbik alapnál, és kétszer rövidebb a nagyobbik alapnál. Határozzátok meg a trapéz alapjait, ha a területe 168 cm^2!

1079. Az $ABCD$ trapéz AC átlójának O felezőpontján keresztül a BD átlóval párhuzamosan egy MN egyenest húztak ($M \in AB$ és $N \in AD$). Felezik-e az alábbi szakaszok a trapéz területét: 1) DM; 2) BN? A választ indokoljátok meg!

1080. Két lépcső h magassága és m hossza egyenlő. Egyenlő hosszú futószőnyeggel borítható-e be a két lépcső, ha az egyiknek 9, a másiknak 12 lépcsőfoka van?

Derékszögű háromszögek megoldása

1081. Egy derékszögű háromszög két befogója 7 cm és 24 cm. Határozzátok meg az átfogó és az átfogóra húzott súlyvonal hajlásszögének szinuszát és koszinuszát!

1082. Egy egyenlő szárú trapéz alapjai 9 cm és 21 cm, szára pedig 10 cm. Mekkora:
1) a nagyobbik alapon lévő szögek szinusza;
2) az átló és a középvonal hajlásszögének szinusza?

1083. Határozzátok meg a derékszögű háromszög legkisebb szögének szinuszát és koszinuszát, ha:
1) $a - b = 17$ cm, $c = 25$ cm;
2) $c - a = 1$ cm, $c - b = 50$ cm;
3) $c + a = 49$ cm, $c + b = 50$ cm!

1084. Az A pont 2 cm-re van egy körvonaltól. A körvonal sugara 3 cm. Határozzátok meg a pontból a körvonalhoz húzott érintők hajlásszögének koszinuszát!

1085. Határozzátok meg az R sugarú körben az $n°$-os ívhez tartozó húr hosszát!

1086. Töltsétek ki az alábbi táblázatot, ha a és b egy derékszögű háromszög befogói, c az átfogó, A és B a háromszög hegyesszögei!

37. táblázat

A háromszög elemei	1	2	3	4	5	6	7	8
a			47,2	10,2	17		12,7	
b						75	13,4	8
c	13,5	0,25			20			12
$A\angle$	40		67			52		
$B\angle$		32		53				

1087. Egy téglalap átlója 32,5 cm és 4 : 11 arányban osztja a téglalap szögét. Határozzátok meg a téglalap kerületét!

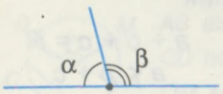
1088. Két egymásra merőleges AB és AC húr hossza 38,5 cm és 21,3 cm. Mekkora szöget zárnak be ezek a húrok az AM átmérővel?

1089. Határozzátok meg annak az egyenlő szárú háromszögnek az oldalait, melynek a szárszöge 47°12', és az alap, illetve a szár hosszának összege 59,4 cm!

1090. Két körvonal kívülről érinti egymást. Határozzátok meg a körvonalak közös külső érintői közötti hajlásszöget, ha sugaraik 3 cm és 12 cm!

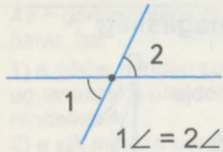
SZÖGEK

mellékszögek



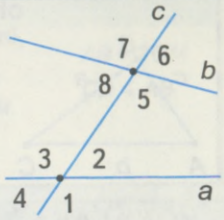
$\alpha + \beta = 180°$

csúcsszögek



$1\angle = 2\angle$

két egyenes metszése egy harmadikkal



belső: a) egy oldalon fekvő
$2\angle$ és $5\angle$, $3\angle$ és $8\angle$
b) különböző oldalakon fekvő
$2\angle$ és $8\angle$, $3\angle$ és $5\angle$

megfelelő $1\angle$ és $5\angle$, $2\angle$ és $6\angle$
$3\angle$ és $7\angle$, $4\angle$ és $8\angle$

külső: a) egy oldalon fekvő
$1\angle$ és $6\angle$, $4\angle$ és $7\angle$
b) különböző oldalakon fekvő
$1\angle$ és $7\angle$, $4\angle$ és $6\angle$

PÁRHUZAMOS EGYENESEK

ISMERTETŐJEL

HA

két egyenest metszünk egy harmadikkal és

- az egy oldalon lévő belső szögek összege 180°,
- különböző oldalon lévő belső szögek egyenlők,
- megfelelő szögek egyenlők,

két egyenes merőleges egy harmadik egyenesre,

AKKOR

az adott egyenesek párhuzamosak



TULAJDONSÁG

HA

két párhuzamos egyenest metsz egy harmadik egyenes,

egy egyenes merőleges két párhuzamos egyenes közül az egyikre,

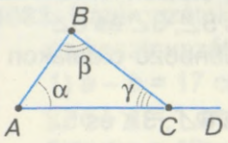
AKKOR

- a társszögek összege 180°
- a váltószögek egyenlők
- az egyállású szögek egyenlők
- merőleges a másik egyenesre is

HÁROMSZÖGEK

TULAJDONSÁGOK

szögek



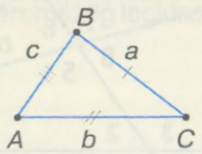
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$BCD\angle = \alpha + \beta$

$BCD\angle > \alpha$

$BCD\angle > \beta$

oldalak



$a + b + c = P$

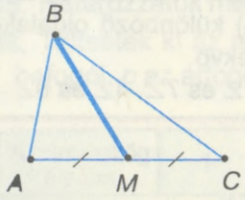
$a < b + c$

$b < a + c$

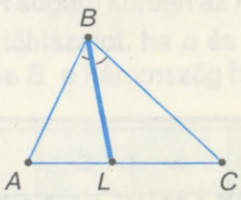
$c < a + b$

NEVEZETES VONALAK

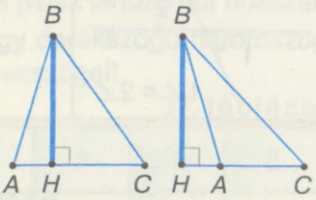
súlyvonal



szögfelező



magasság



EGYENLŐ SZÁRÚ HÁROMSZÖG

tulajdonság

HA

$ABC\triangle$ egyenlő szárú ($AB = BC$),

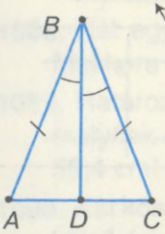
AKKOR

$A\angle = C\angle$

a BD szögfelező súlyvonal is

a BD szögfelező magasság is

HA ismertetőjel



DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG

tulajdonság

HA

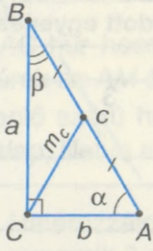
$ABC\triangle$ derékszögű ($C\angle = 90°$),

AKKOR

$\alpha + \beta = 90°$

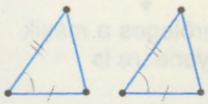
$m_c = 0{,}5c$

HA ismertetőjel

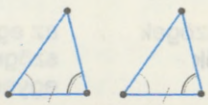


A HÁROMSZÖGEK EGYBEVÁGÓSÁGÁNAK ISMERTETŐJELEI

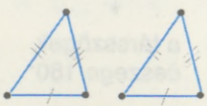
két oldal és az általuk közbezárt szög



egy oldal és a rajta fekvő két szög alapján

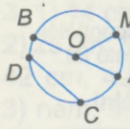


három oldal alapján



KÖRVONAL

NEVEZETES SZAKASZOK

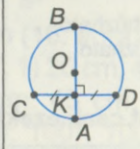


AB átmérő,
CD húr,
OM sugár

$AB = 2OM$

$CD \leqslant AB$

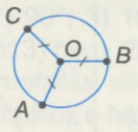
TULAJDONSÁGOK



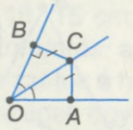
Ha $\frac{AB \perp CD}{CK = KD}$, akkor $\frac{CK = KD}{AB \perp CD}$

PONTOK MÉRTANI HELYE

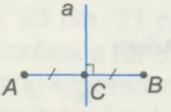
Az F görbe pontok mértani helye, ha:
1) a görbe minden pontja ugyanazzal a tulajdonsággal rendelkezik;
2) a sík minden pontja, mely rendelkezik az adott tulajdonsággal, illeszkedik a görbére



A körvonal egy adott ponttól azonos távolságra lévő pontok mértani helye

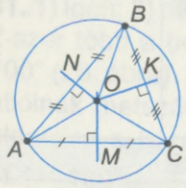


A szögfelező a szög száraitól azonos távolságra lévő pontok mértani helye



A szakaszfelező merőleges a szakasz végpontjaitól azonos távolságra lévő pontok mértani helye

A HÁROMSZÖG KÖRÉ ÍRT KÖRVONAL

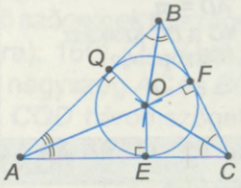


A körvonal *O* középpontja

az oldalfelező merőlegesek metszéspontja

$R = OA = OB = OC$

A HÁROMSZÖGBE ÍRT KÖRVONAL



a szögfelezők metszéspontja

$r = OE = OF = OQ$

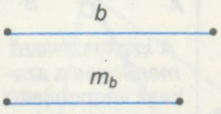
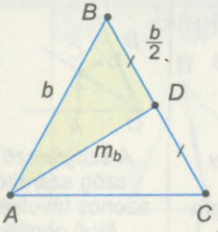
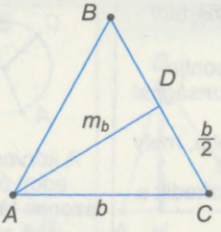
Bármely háromszög köré / Bármely háromszögbe csakis egy körvonal írható.

SZERKESZTÉSI FELADATOK

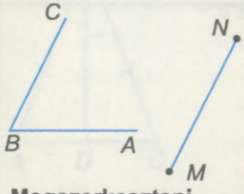
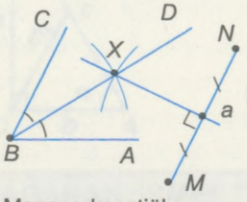
Vonalzóval	*Körzővel*
• tetszőleges egyenes húzható; • adott ponton keresztül egyenes húzható; • két ponton keresztül egyenes húzható	• adott középpontból, adott sugarú körvonal húzható; • adott félegyenesre annak kezdőpontjától adott hosszúságú szakasz mérhető fel

A körzőt és a vonalzót csak ezekre a műveletekre lehet használni

SEGÉDSZERKESZTÉS MÓDSZERE

Feladat	*Elemzés*	*Szerkesztés*	*Bizonyítás*
Adott:  **Megszerkeszteni** olyan $ABC\Delta$-et, amelyben $AB = BC = b$, $AD = m_b$, (D a BC szakasz felezőpontja)	 1) készítsünk vázlatrajzot; 2) az $ABD\Delta$ segédháromszög ($AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$); 3) $BC = b$	 Megszerkesztjük: 1) az ABD háromszöget három oldala alapján $AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$; 2) a BD félegyenesre rámérjük a $BC = b$ szakaszt; 3) meghúzzuk az AC szakaszt. Az $ABC\Delta$ a keresett háromszög	Az $ABC\Delta$-ben $AB = BC = b$, $AD = m_b$ (D a BC szakasz felezőpontja) a szerkesztés alapján

PONTOK MÉRTANI HELYÉNEK MÓDSZERE

Feladat	*Elemzés*	*Szerkesztés*	*Bizonyítás*
Adva:  **Megszerkeszteni** azt az X pontot, amely azonos távolságra van az ABC szög száraitól, valamint az M és az N pontoktól	Az X pont: 1) azonos távolságra van az ABC szög száraitól; 2) azonos távolságra van az M és N pontoktól az 1) feltételt kielégítő pontok mértani helye az ABC szög szögfelezője; a 2) feltételt kielégítő pontok mértani helye az MN szakasz felezőmerőlegese; az X pont a félegyenes és az egyenes metszéspontja	 Megszerkesztjük: 1) az ABC szög BD szögfelezőjét; 2) az MN szakasz a felezőmerőlegesét; 3) X-et, amely a BD félegyenes és az a egyenes metszéspontja	$X \in BD$, ezért X azonos távolságra van az ABC szög száraitól $X \in a$, ezért $MX = NX$

1. fejezet

1. §.

3. 1) 14 cm; 2) 31 cm; 3) 34 cm. **4.** Nem (16. ábra); igen (17. ábra). **6.** 1) 54 cm; 2) 25 cm; 3) 25 cm; 4) 27 cm; 5) 14 cm. **7.** 1) 20 cm, 40 cm, 40 cm, 40 cm; 2) 14 cm, 42 cm, 42 cm, 42 cm; 3) 5 cm, 45 cm, 45 cm, 45 cm. **8.** 1) Igen; 2) nem; 3) nem. **9.** 100°, 100°, 100° (19. ábra); 100°, 100° (20. ábra); 60° (21. ábra). **10.** 1) 150°; 2) 60°; 3) 70°. **11.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem. **12.** 1) 36°, 72°, 108°, 144°; 2) 75°, 85°, 95°, 105°; 3) 85°, 95°, 105°, 75°; 4) 40°, 80°, 40°, 200°. **13.** Nem. **14.** 90°, 90°, 90°, 90°. **15.** 180°. **16.** *Útmutatás:* számítsátok ki a negyedik szöget! **17.** 1) 105°; 2) 90°; 3) 100°. **18.** 15 cm, 7 cm, 23 cm, 21 cm. **19.** 64 cm. **20.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem. **21.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a háromszög egyenlőtlenséget! **22.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a háromszög egyenlőtlenséget! **23.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjelét: egy oldal és a rajta levő két szög alapján! **24.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjelét, a három oldal alapján és az egyenlő szárú háromszögek tulajdonságát! **25.** 1) 36°, 72°, 108°, 144°; 2) 30°, 60°, 120°, 150°; 3) 40°, 60°, 120°, 140°. **26.** 1) 2; 2) 4; 3) 2. **27.** 1) Nem; 2) nem. **28.** 90°. **29.** 1) 142°, 22°, 136°, 60°; 2) 130°, 30°, 115°, 85°; 3) 131°, 35°, 89°, 105°. **30.** *Útmutatás:* a négyszög külső szögeinek összege egyenlő a négyszög szögei mellékszögeinek összegével! **31.** 1) Igen; 2) nem; 3) igen. **32.** *Útmutatás:* a négyszög külső szögeinek összege 2-szer több a belső szögek összegénél. **33.** 115° (23. ábra); 160° (24. ábra); 100° (25. ábra). **34.** 10 cm. **35.** *Útmutatás:* legyen az $ABCD$ négyszög AC és BD átlóinak metszéspontja az O pont! Írjátok fel az AOB és COD háromszögek oldalaira a háromszö gegyenlőtlenséget! **36.** *Útmutatás:* az $ABM\Delta$-ből az $M\angle = 180° - \frac{1}{2}A\angle - \frac{1}{2}B\angle$, a $CDN\Delta$-ből $N\angle = 180° - \frac{1}{2}C\angle - \frac{1}{2}D\angle$. Adjátok össze az előbbi egyenlőségek megfelelő oldalait, és vonjatok le következtetést! **41.** *Útmutatás:* a gyár építési területe a négyszög átlóinak metszéspontja.

2. §.

42. Nem (33. ábra); nem (34. ábra). **43.** 1) 5 cm, 10 cm; 2) 1,2 dm, 0,4 dm. **44.** 1) 120°, 60°; 2) 45°, 135°; 3) 90°, 90°. **45.** Nem. **46.** 1) $OC = 6$ cm, $OD = 3$ cm; 2) $AC = 12$ cm, $BD = 6$ cm; 3) $AD = 8$ cm, $DC = 5$ cm. **47.** 1) $B\angle = D\angle = 145°$, $C\angle = 35°$; 2) $A\angle = C\angle = 40°$, $D\angle = 140°$; 3) $A\angle = 75°$, $B\angle = D\angle = 105°$; 4) $B\angle = 64°$, $A\angle = C\angle = 116°$. **48.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem. **49.** 1) Nem; 2) nem; 3) nem. **50.** $A\angle = C\angle = 45°$, $B\angle = D\angle = 135°$ (37. ábra); $A\angle = C\angle = 50°$, $B\angle = D\angle = 130°$ (38. ábra); $A\angle = C\angle = 60°$, $B\angle = D\angle = 120°$ (39. ábra). **51.** 1) 135°, 45°, 135°, 45°; 2) 65°, 115°, 65°, 115°; 3) 60°, 120°, 60°, 120°; 4) 40°, 140°, 40°, 140°. **52.** 1) 58°, 122°, 58°, 122°; 2) 68°, 112°, 68°, 112°; 3) 90°, 90°, 90°, 90°. **53.** Nem. **54.** 1) 13,5 cm, 10,5 cm, 13,5 cm, 10,5 cm; 2) 3 cm, 21 cm, 3 cm, 21 cm; 3) 15 cm, 5 cm, 8,5 cm, 15,5 cm, 8,5 cm. **55.** $AB = CD = 4$ cm, $AD = BC = 6$ cm (40. ábra); $AB = CD = 10$ cm, $AD = BC = 10$ cm (40. ábra); $AB = CD = 6$ cm, $AD = BC = 6{,}8$ cm

(40. ábra). **56.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a háromszögek egybevágóságának ismertetőjelét a három oldal alapján. **57.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **58.** 1) Igen; 2) nem; 3) nem. **59.** *Útmutatás:* ez az összeg a paralelogramma különböző magasságainak összegével egyenlő. **60.** 3. **61.** 1) 72°, 108°, 72°, 108°; 2) 80°, 100°, 80°, 100°; 3) 54°, 126°, 54°, 126°. **62.** 1) 120°, 60°, 120°, 60°; 2) 160°, 20°, 160°, 20°; 3) 72°, 108°, 72°, 108°. **63.** 60° (43. ábra); 50° (44. ábra); 120° (45. ábra). **64.** 1) 35°, 145°, 35°, 145°; 2) 45°, 135°, 45°, 135°; 3) 89°, 91°, 89°, 91°. **65.** *Útmutatás:* húzzátok meg a paralelogramma tompaszögének csúcsából húzott magasságokat, és elemezzétek a kapott derékszögű háromszögeket! **66.** 16°, 96°. **67.** 45°, 135°, 45°, 135°. **68.** Derékszögű. **69.** 1) *Útmutatás:* igazoljátok, hogy a paralelogramma szögfelezője és az oldal derékszögű háromszöget alkot! 2) *Útmutatás:* alkalmazzátok az egyenesek párhuzamosságának ismertetőjelét! **70.** 60°, 120°, 60°, 120°. **71.** 1) 70 cm; 2) 14 cm. **72.** 1) 6 cm, 3 cm; 2) 15 cm; 3) 40 cm. **73.** 1) *Útmutatás:* bizonyítsátok be a megfelelő háromszögek egybevágóságát! 2) 9 cm. **74.** *Útmutatás:* először igazoljátok a *BN* és *MD* egyenesek párhuzamosságát! **75.** 2,5 cm. **76.** 1) *Útmutatás:* alkalmazzátok az egyenlő szárú háromszögek ismertetőjelét! 2) 30 cm. **79.** 1) 45°; 2) 135°. **80.** 6 cm. **81.** 2 cm vagy 4 cm. **82.** 10 cm, 15 cm, 10 cm, 15 cm. **83.** 2 : 3 az oldalak aránya. **84.** 9,6 cm, 14,4 cm, 9,6 cm, 14,4 cm. **85.** 1 : 2 az oldalak aránya. **86.** 7 cm, 14 cm, 7 cm, 14 cm. **87.** $AB \parallel OO_1$.

3. §.

89. Nem. **91.** 1) Nem; 2) igen. **92.** A paralelogramma tulajdonsága alapján. **93.** 1) Nem; 2) igen. **95.** A paralelogramma meghatározása alapján. **96.** Igen. **97.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem. **98.** 1) *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma tulajdonságait; 2) *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma tulajdonságait! **99.** 1) 35°; 2) 5 cm. **100.** 1) *Útmutatás:* a paralelogramma meghatározása alapján; 2) *Útmutatás:* a paralelogramma oldalainak és szögeinek tulajdonsága alapján. **101.** *Útmutatás:* a paralelogramma oldalainak és szögeinek tulajdonsága alapján. **102.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy $A\angle = C\angle$, és alkalmazzátok a paralelogramma szögeinek és oldalainak a tulajdonságát! **103.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma szögeinek és oldalainak a tulajdonságát! **104.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma ismertetőjelét! **105.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy az *AECF* négyszög paralelogramma! **106.** 1) $OC = 3$ cm, $BO = 5$ cm; 2) $AO = 4{,}8$ dm, $OD = 2$ dm; 3) $AO = 2{,}1$ cm, $BO = 35$ mm; 4) $OC = 0{,}6$ dm, $OD = 6$ cm. **107.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma ismertetőjelét! **108.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma ismertetőjelét! **109.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma átlóinak tulajdonságát! **110.** 1) Paralelogramma; 2) négyszög; 3) paralelogramma; 4) négyszög. **111.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a párhuzamos egyenesek ismertetőjelét, majd a paralelogramma tulajdonságát! **112.** 1) Nem; 2) igen; 3) igen. **113.** Igen. **114.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy az AB_1CD_1 és B_1BD_1D négyszög paralelogramma. **115.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma ismertetőjelét! **116.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy az *EBM* és a *KDN* háromszögek egybevágók. **117.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy az $AKM\Delta = CNP\Delta$ és $BPK\Delta = DMN\Delta$. **119.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy a *DCEF* négyszög paralelogramma. **120.** 1) 3 cm;

2) 4 cm; 3) 4 cm. **121.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy *ABE* és *CDF* háromszögek egybevágóak, majd alkalmazzátok a paralelogramma ismertetőjelét! **122.** *Útmutatás:* igazoljátok a háromszögek egybevágóságát, majd alkalmazzátok a paralelogramma átlóinak tulajdonságát! **123.** *Útmutatás:* igazoljátok a háromszögek egybevágóságát, majd alkalmazzátok a paralelogramma ismertetőjelét! **124.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma átlóinak tulajdonságát! **125.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy az *MNKP* négyszög paralelogramma, majd alkalmazzátok a paralelogramma ismertetőjelét! **126.** 1) *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma átlóinak tulajdonságát; 2) 36°. **129.** *Útmutatás:* igazoljátok a háromszögek egybevágóságát, majd alkalmazzátok a paralelogramma ismertetőjelét! **130.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma átlóinak tulajdonságát! **131.** Igen. **132.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a párhuzamos egyenesek ismertetőjelét, majd a paralelogramma ismertetőjelét! **133.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a paralelogramma átlóinak tulajdonságát!

4. §.

136. 1) $AD = 16$ cm, $DC = 12$ cm; 2) $BD = 20$ cm; 3) $AO = OC = BO = OD = 10$ cm. **137.** 1) 14 cm és 14 cm; 2) 28 cm. **138.** 54°, 36°, 54°. **139.** 1) 10 cm; 2) 1,8 dm; 3) 44 mm. **140.** Az átlók egyenlők. **141.** 1) 6 cm; 2) 3 cm; 3) 9 mm. **142.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a téglalap átlóinak tulajdonságát! **143.** $1\angle = 35°$, $2\angle = 125°$, $3\angle = 55°$ (79. ábra); $1\angle = 3\angle = 30°$, $2\angle = 60°$ (80. ábra); $1\angle = 65°$, $2\angle = 130°$, $3\angle = 25°$ (81. ábra). **144.** 30° (82. ábra); 60° (83. ábra); 90° (84. ábra). **146.** 1) 2 cm; 2) 7 mm; 3) 0,22 dm. **147.** 1) 20 cm; 2) 0,5 dm; 3) 14 mm. **148.** 1) $P = 36$ cm; 2) $b = 12$ cm; 3) $a = 10$ cm; 4) $b = 12$ cm; 5) $P = 32$ cm. **149.** 1) 32 cm; 2) 30 cm; 3) 56 cm. **150.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy az adott paralelogramma szögei derékszögek! **151.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy az adott paralelogramma téglalap! **152.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy az adott négyszög szemben fekvő oldalai egyenlő hosszúságúak, és számítsátok ki a negyedik szöget! **153.** *Útmutatás:* számítsátok ki a négyszög szögeit (lásd a 152. feladatot)! **156.** *Útmutatás:* az átló és az oldal hajlásszögét jelöljétek α-val, és számítsátok ki a paralelogramma szögeit! **157.** *Útmutatás:* számítsátok ki a téglalap átlója és az oldala közötti szöget, és alkalmazzátok a derékszögű háromszögben 30°-os szöggel szembeni befogó tulajdonságát! **158.** *Útmutatás:* alkalmazzátok, hogy az egyenlő oldalú háromszög belső szögei 60°-osak! **159.** 1) 54°, 36°; 2) 18°. **161.** 1) 9,6 cm, 14,4 cm; 2) 10 cm, 14 cm; 3) 8 cm, 16 cm. **162.** 1) 6 cm; 2) 4,3 cm. **163.** 1) 26 cm vagy 22 cm; 2) 14 cm vagy 16 cm. **165.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy téglalap belső szögének szögfelezője, a téglalapból egyenlő szárú háromszöget metsz ki! **166.** 1) 90 cm; 2) 22,8 dm. **167.** *Útmutatás:* alkalmazzatok pótszerkesztést! Rajzoljatok olyan derékszögű háromszöget, melynek átfogója d, egyik befogója a! **168.** 1) *Útmutatás:* alkalmazzatok pótszerkesztést! Rajzoljatok olyan derékszögű háromszöget melynek átfogója d, egyik hegyesszöge α; 2) *Útmutatás:* alkalmazzatok pótszerkesztést! Rajzoljatok olyan háromszöget, melynek két oldala $\frac{1}{2}d$, $\frac{1}{2}d$, a köztük lévő hajlásszög pedig α! **169.** 1) 12 cm, 12 cm, 13,1 cm, 13,1 cm. **174.** *Útmutatás:* alkalmazzatok pótszerkesztést! Rajzoljatok a téglalaphoz háromszöget! Alkalmazzátok a téglalap azon tulajdonságát, hogy átlói

metszéspontjukban felezik egymást! **175.** 3 cm, 3 cm. **176.** *Útmutatás:* húzzatok az alap adott pontján át a háromszög oldalával párhuzamos egyenest! Igazoljátok, hogy ez az egyenes a háromszögből egyenlő szárú háromszöget metsz ki! **177.** 2) 10 cm. **178.** *Útmutatás:* alkalmazzatok pótszerkesztést! Rajzoljatok háromszöget d és s oldala, valamint 45°-os szöge alapján! **179.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy az $ABCD$ négyszög téglalap! **180.** *Útmutatás:* például ellenőrizzétek, le a négyszög szemben lévő oldalainak és átlóinak egyenlőségét! **181.** Nem. **182.** *Útmutatás:* a téglalap szemben lévő oldalai egyenlők.

5. §.

184. Nem. **185.** 1) $BC = AD = DC = 10$ cm; 2) $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. **186.** $1\angle = 2\angle = 3\angle = 25°$. **187.** A rombusz átlói merőlegesek egymásra. A rombusz átlói szögfelezők. **188.** 1) 5 cm; 2) 7 cm-ével; 3) $1\angle = 3\angle = 4\angle = 45°$, $2\angle = 90°$. **189.** 1) 3 cm; 2) 0,6 dm; 3) 70 mm. **190.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a rombusz azon tulajdonságát, hogy átlói merőlegesek és metszéspontjukban felezik egymást! **191.** *Útmutatás:* alkalmazzátok a rombusz meghatározását, és a háromszögek egybevágóságát három oldaluk alapján! **192.** $1\angle = 3\angle = 4\angle = 25°$, $2\angle = 65°$, $5\angle = 90°$. **193.** 1) 18°, 72°; 2) 27°, 63°; 3) 30°, 60°. **194.** *Útmutatás:* a rombuszt átlója két egyenlő szárú háromszögre darabolja. **195.** 1) 60°, 120°, 60°, 120°; 2) 75°, 105°, 75°, 105°; 3) 25°, 155°, 25°, 155°. **196.** 70°, 110°, 70°, 110° (105. ábra); 36°, 144°, 36°, 144° (106. ábra); 60°, 120°, 60°, 120° (107. ábra). **197.** 1) 40 cm; 2) 12,8 dm; 3) 180 mm. **198.** 1) 64 cm; 2) 2,4 dm; 3) 168 mm. **199.** 1) 3 cm; 2) 14,5 mm; 3) 0,75 dm. **200.** *Útmutatás:* számítsátok ki a négyszög belső szögeit! **202.** *Útmutatás:* számítsátok ki a rombusz szögeit! **204.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy az adott paralelogramma oldalai egyenlők! **205.** 30°, 150°, 30°, 150°. **206.** *Útmutatás:* húzzátok meg az $ABCD$ rombusz AM és AP magasságait megfelelően a BC és CD oldalakra; igazoljátok: $ABM\Delta = ADP\Delta$. **207.** 1) 60°, 120°, 60°, 120°; 2) 80 cm. **208.** 1) 70°, 110°, 70°, 110°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°; 3) 80°, 100°, 80°, 100°. **209.** $BM = 2\sqrt{3}$, $MD = 2$, $AM = 2$. **210.** 1) 72°, 108°, 72°, 108°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°; 3) 60°, 120°, 60°, 120°. **211.** 30°, 150°, 30°, 150°. **212.** 1) 16 cm; 3) mindegyik 4 cm-es. **213.** *Útmutatás*: alkalmazzatok pótszerkesztést: 1) szerkesszetek derékszögű háromszöget $\frac{d_1}{2}$ és $\frac{d_2}{2}$ befogókkal; 2) szerkesszetek háromszöget d, a, a oldalakkal; 3) szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget a szára és α szárszöge alapján! **215.** 1) 16 cm; 2) 58 mm; 3) 0,82 dm. **217.** *Útmutatás:* Bizonyítsátok be, hogy $AND\Delta = CND\Delta = AMB\Delta = CMB\Delta$. **218.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem. **219.** *Útmutatás:* alkalmazzatok pótszerkesztést: 1) szerkesszetek egyenlő szárú derékszögű háromszöget a befogóval; 2) szerkesszetek olyan egyenlő szárú derékszögű háromszöget, melynek befogója $\frac{d}{2}$! **220.** Legyen az adott rombusz $ABCD$, AM és AP megfelelően a BC és a CD oldalakra húzott magasságok. Bizonyítsátok be, hogy $ACM\Delta = ACP\Delta$ (lásd a 206. feladatot)! **221.** 30°, 150°, 30°, 150°. **222.** *Útmutatás:* húzzátok meg a rombusz átlóit és igazoljátok, hogy ACN és CAL, BDK és DBM szögek egyenlők. **223.** *Útmutatás:* először igazoljátok, hogy a rombusz átlóinak metszéspontja és a szemben fekvő oldalakra húzott ma-

gasságok talppontja egy egyenesre illeszkednek, majd bizonyítsátok be, hogy a talppontok által meghatározott négyszög átlói egyenlők! **224.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy a négyszög oldalai párhuzamosak a téglalap átlóival, és a hossza az átló felével egyenlő! **225.** *Útmutatás:* számítsátok ki az *MPKN* négyszög szögeit! **227.** 5 cm. **228.** *Útmutatás:* előbb igazoljátok, hogy a téglalap két szomszédos szögének szögfelezője derékszögben metszi egymást, majd igazoljátok, hogy a kapott téglalap négyzet! **229.** 1) *Útmutatás:* alkalmazzatok pótszerkesztést az *s* oldal és a hozzá tartozó 22,5°-os szög alapján! **230.** *Útmutatás:* ha az anyagdarabot átlója mentén kettéhajtjuk, a két félnek fednie kell egymást. **231.** Nem, mivel az adott alakzat rombusz is lehet. **232.** *Útmutatás:* jelöljétek a két oszlopot *A*-val és *B*-vel. Az *AB* szakasz *O* felezőpontján keresztül húzzatok merőleges egyenest az *AB* szakaszra! Az *O* ponttól mindkét irányba a meghúzott egyenesre mérjetek fel *OA* hosszúságú szakaszt! **234.** A tanács nem helyes. Lehet még rombusz is. **235.** *Útmutatás:* igazoljátok, hogy a *BA* és *BC* félegyenesek kiegészítő félegyenesek!

6. §.

236. Nem, mivel $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{2}$. **237.** 4 (125. ábra); 3 (126. ábra). **238.** Nem. **239.** 4 (128. ábra); 12 (129. ábra). **240.** 1) 4 cm; 2) 7 cm. **241.** 1) 6 cm; 2) 15 cm; 3) 4 cm. **243.** 1) 4 cm-esek és 6 cm-esek; 2) 6 cm és 12 cm; 4 cm és 8 cm. **245.** 1) 4 cm, 2,5 cm, 3,5 cm; 2) 15 mm, 20 mm, 25 mm; 3) 4,5 cm, 5 cm, 7 cm. **246.** 1) 4 cm, 5 cm, 6 cm; 2) 0,25 dm, 6 cm, 6,5 cm. **247.** *Útmutatás:* fejezzétek ki a középvonalakat a háromszög oldalain keresztül! **248.** 1) 2 cm; 2) 4 dm; 3) 8 dm. **249.** 1) 24 cm; 2) 4,8 dm; 3) 600 mm. **250.** 1) 28 cm; 2) 56 cm; 3) 60 cm. **251.** 1) 36 cm; 2) 4,8 dm; 3) 600 mm. **252.** 1) 10 cm és 22 cm; 2) 1,2 dm és 1,8 dm; 3) 200 mm és 28 cm. **253.** 1) Egyenlő oldalú; 2) egyenlő szárú. **255.** 1) 9 cm; 2) 12 cm; 3) 20 cm. **256.** *Útmutatás:* az *ADB* és *DBC* szögekre valamint az *MC* és *AN* egyenesekre alkalmazzátok Thalész tételét! **257.** 1) 15 cm, 10 cm; 2) 10 cm, 5 cm. **258.** 2 cm. *Útmutatás:* hosszabbítsátok meg az *AM* félegyenest az *M* ponton túl 4 cm-rel! Jelöljétek ezt a pontot *P*-vel! Hosszabbítsátok meg az *OK* szakaszt a *K* ponton túl 4 cm-rel! Ezt a pontot jelöljétek *D*-vel! Vizsgáljátok a kapott *BAP* háromszöget! **259.** 1) 7,5 cm, 10 cm, 12,5 cm; 2) 6 cm, 8 cm, 10 cm. **260.** 1) 28 cm, 32 cm, 36 cm; 2) 1,4 dm, 1,6 dm, 1,8 dm. **261.** *Útmutatás:* fejezzétek ki a háromszögek kerületeit az egyik háromszög oldalán keresztül! **262.** 1) 10 cm; 2) 49 cm. **263.** 1) 25 cm; 2) 3,5 dm. **264.** 1) 16 cm; 2) 2,6 dm. **266.** *Útmutatás:* húzzatok az adott pontokon keresztül a háromszög középvonalaival párhuzamos egyeneseket! **268.** *Útmutatás:* az *M* ponton keresztül húzzatok a *BD* egyenessel párhuzamos egyenest! Alkalmazzátok Thalész tételét! **269.** *Útmutatás:* az egyik súlyvonal talppontján keresztül húzzatok a másik súlyvonallal párhuzamos egyenest! Alkalmazzátok Thalész tételét! **270.** 2) 12 cm, 24 cm, 30 cm; 3) 24 cm. **272.** *Útmutatás:* fejezzétek ki mind a négy háromszög oldalait az adott háromszög oldalain keresztül! **273.** 1) 36 cm. **275.** *Útmutatás:* az *M* ponton keresztül húzzatok a *BC* egyenessel párhuzamos egyenest! Alkalmazzátok Thalész tételét! **277.** *Útmutatás:* az *AB* szakaszt úgy mérjétek fel, hogy az *A* pont a papírlap első vonalán, a *B* pont a

kilencedik vonalán legyen! **278.** *Útmutatás:* az *MN* szakasz az *ABC* háromszög középvonala. **281.** Három ilyen út van. Ezek a háromszög középvonalai.

7. §.

282. 1) *BC* és *AD*; 2) *AB* és *CD*; 3) az *AD* alapon lévő $A\angle$ és $D\angle$, a *BC* alapon lévő $B\angle$ és $C\angle$; 4) az $A\angle$ és $B\angle$ az *AB* száron lévő szögek, a $C\angle$ és $D\angle$ a *CD* száron van. **283.** *ABCD* trapéz. **284.** 1) 3 cm; 2) 90°. **286.** Nem. **287.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a párhuzamos egyenesek tulajdonságát! **288.** $B\angle = 130°$, $D\angle = 40°$ (156. ábra); $B\angle = 90°$, $C\angle = 134°$ (157. ábra); $B\angle = 140°$, $C\angle = 144°$ (158. ábra). **289.** 1) $A\angle = 70°$, $C\angle = 150°$; 2) $A\angle = 55°$, $D\angle = 35°$. **290.** 1) $D\angle = 60°$; 2) $C = 155°$; 3) $C\angle = 130°$, $D\angle = 50°$. **291.** 1) $B\angle = 110°$, $D\angle = 26°$; 2) $B\angle = 115°$, $C\angle = 144°$; 3) $A\angle = 60°$, $C\angle = 152°$; 4) $A\angle = 45°$, $D\angle = 38°$. **293.** 1) 7 cm; 2) 3 cm; 3) 8 cm. **294.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjelét az átfogó és egyik hegyesszöge alapján! **295.** 4 cm (162. ábra); 7 cm (163. ábra); 15 cm (164. ábra). **296.** 1) $MN = 8$ cm; 2) $BC = 9$ cm; 3) $AD = 13$ cm; 4) $BC = 9$ cm; 5) $MN = 12$ cm. **297.** 1) 40 cm; 2) 62 cm. **298.** 8 cm, 16 cm, 12 cm (165. ábra); 4 cm, 11 cm, 7,5 cm (166. ábra). **299.** 1) 134° és 36°; 2) 145° és 25°; 3) 128° és 56°. **300.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **301.** 1) 2 cm; 2) 38 mm. **302.** *Útmutatás*: legyen az adott trapéz *ABCD*, melynek alapjai *BC* és *AD* ($BC < AD$). Húzzatok az *AB* egyenessel párhuzamos *CE* egyenest! Igazoljátok, hogy a *CED* háromszög egyenlő szárú. **303.** $A\angle = D\angle = 58°$, $B\angle = C\angle = 122°$ (167. ábra); $A\angle = D = 60°$, $B\angle = C\angle = 120°$ (168. ábra); $A\angle = D\angle = 60°$, $B\angle = C\angle = 120°$ (169. ábra). **304.** *Útmutatás*: alkalmazzátok az egyenlő szárú trapéz és a párhuzamos egyenesek tulajdonságát! **305.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a párhuzamos egyenesek tulajdonságát! **306.** 1) 70°, 110°, 110°, 70°; 2) 36°, 144°, 144°, 36°. **307.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek egybevágóságát egy oldal és a rajta levő két szög alapján! **308.** *Útmutatás*: igazoljátok az *ABD* és a *DCA* háromszögek egybevágóságát! **309.** 6 cm. **310.** 34 cm. **311.** 1) 4 cm és 12 cm; 2) 5 cm és 9 cm. **312.** *Útmutatás*: igazoljátok, hogy $ABK\Delta = DCM\Delta$. **313.** 1) 6 cm és 18 cm; 2) 3 cm és 11 cm. **314.** *Útmutatás*: alkalmazzátok az egyenlő szárú háromszög és a párhuzamos egyenesek tulajdonságát! **315.** 1) 26 cm; 2) 286 mm. **317.** 6 cm. **318.** 8 cm és 12 cm. **319.** *Útmutatás*: hosszabbítsátok meg az adott szakaszt úgy, hogy metssze a szárakat, majd alkalmazzátok Thalész tételét és a trapéz, valamint a háromszög középvonalának tulajdonságát! **320.** 1) 14 cm; 2) 9 cm. **322.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a párhuzamos egyenesek tulajdonságát! **323.** 120°, 60°, 120°, 60°. **324.** *Útmutatás*: legyenek az *ABCD* trapéz alapjai *AB* és *CD*, az átlók metszéspontja *O*. Igazoljátok az *ABC* és *BAD* háromszögek egybevágóságát! **325.** *Útmutatás*: a trapéz tompaszögének csúcsán keresztül húzzatok az átlóval párhuzamos egyenest úgy, hogy metssze a hosszabbik alapot! Alkalmazzátok az egyenlő szárú háromszög magasságáról szóló tételt! **327.** 1) 60°; 2) 12 cm és 24 cm. **328.** $\frac{3a}{4}$. **329.** 9 cm és 23 cm. **331.** *Útmutatás*: alkalmazzatok pótszerkesztést! Szerkesszetek háromszöget $a + b$, d_1 és d_2 oldalak alapján! **333.** Az *EF* szakasz a trapéz középvonala, így $EF = 3$ cm. **335.** 3,5 m. **336.** Igen.

8. §.

338. 90°(199. ábra); 180° (200. ábra); 60° (201. ábra). **340.** Minden szög 90°-os. **341.** 60° (202. ábra); 25° (203. ábra); 90° (204. ábra). **342.** 1) 180°; 2) 120°; 3) 240°. **343.** 1) 30° és 330°; 2) 62° és 298°; 3) 100° és 260°. **344.** 1) 70°; 2) 210°. **346.** 1) 12 cm; 2) 0,2 dm; 3) 39 mm. **347.** *Útmutatás*: igazoljátok az *AC* és *BD* ívek egyenlőségét! **348.** *Útmutatás*: vegyétek figyelembe, hogy a *BC* ív közös. **349.** 1) 26°; 2) 63°; 3) 100°. **350.** 1) 32°; 2) 64°; 3) 220°. **351.** 70° (208. ábra); 140° (209. ábra); 190° (210. ábra). **352.** 1) 60°, 60°,60°; 2) 36°, 72°, 72°; 3) 30°, 60°, 90°. **353.** 1) 70°, 130°, 160°; 2) 120°, 60°, 180°; 3) 56°, 84°, 220°. **354.** 1) 32°, 32°, 116°; 2) 60°, 60°, 60°; 3) 72°, 72°, 36°. **355.** 70° (211. ábra); 20° (212. ábra). **356.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a középponti szögekről szóló tétel első következményét! **357.** *Útmutatás*: legyen *AB* és *CD* az adott húrok, *AB* = *CD*; kössétek össze az *A*, *B*, *C* és *D* pontokat a körvonal *O* középpontjával. Igazoljátok, hogy az *AOB* és a *COD* háromszögek egybevágók. **358.** *Útmutatás*: az *O* középpontú körvonal *AC* húrja és *BD* átmérőjének a metszéspontját jelöljétek *K*-val, igazoljátok az *AKO* és a *CKO* háromszögek egybevágóságát! **359.** *Útmutatás*: az *O* középpontú körvonal *AC* húrjának és *BD* átmérőjének a metszéspontja legyen *K*, *AK* = *KC*; igazoljátok az *AKO* és a *CKO* háromszögek egybevágóságát! **362.** 1) 72° és 108°; 2) 80° és 100°. **363.** 67°30'; 2) 40°. **364.** 1) 40°; 2) 60°; **365.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a kerületi szögről szóló tételt! **366.** 30° vagy 150°. **367.** 1) 45° és 135°; 2) 36° és 144°. **368.** *Útmutatás*: alkalmazzátok, hogy a körlap 360°-os és a kerületi szögről szóló tételt! **369.** 100° (213. ábra); 120° (214. ábra); 145° (215. ábra). **370.** 1) 70° és 35°; 2) 90° és 45°. *Útmutatás*: alkalmazzátok a kerületi szögről szóló tétel 2. következményét! **372.** *Útmutatás*: a 371. feladat szerint! **374.** 1) 45°; 2) 40°. **375.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek külső szögéről szóló tételt, és számítsátok ki az *ABC*∠-et! **376.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek belső szögeinek összegéről és a mellékszögekről szóló tételt! Számítsátok ki a *DBC* háromszög *DBC*∠-ét! **377.** 50° (219. ábra); 80° (220. ábra). **378.** 40°, 60°, 80°. **381.** 1) olyan körvonal, melynek sugara az adott pontokat összekötő szakasz felével egyenlő; 2) egy olyan háromszög köré írt körvonal íve, melynek egyik oldala *AB* és a vele szemben lévő hegyesszöge α. **382.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a kerületi szögről szóló tétel 2. következményét! **383.** *Útmutatás*: a derékszögű vonalzó derékszögét illesszétek a körvonal két tetszőleges pontjához, ami a lemez külső kerülete, és húzzatok meg az átfogó mentén két húrt. A kerületi szögekről szóló tétel 1. következménye alapján ezek a húrok a körvonal átmérői lesznek. A két megszerkesztett átmérő metszéspontja pedig a lemez középpontja.

9. §.

385. Nem. **387.** Nem. **388.** 1) 9 cm; 2) 180°. **389.** *B*∠ = 100°, *C*∠ = 85° (234. ábra); *M*∠ = 75°, *N*∠ = 120°, *K*∠ = 105° (235. ábra); *F*∠ = 90°, *E*∠ = 60°, *Q*∠ = 90°, *P*∠ = 120° (236. ábra). **390.** 1) a) Nem; b) igen; 2) a) igen, ha *D*∠ = 50°; b) nem. **391.** 1) 125°; 2) 108°; 3) 120°. **392.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **393.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a kerületi szögről szóló tétel 2. következményét! **394.** 1) *Útmu-*

tatás: alkalmazzátok a kerületi szögről szóló tétel 2. következményét! 2) $AD \perp BC$ feltétel esetén. **395.** 10 cm (238. ábra); 3 cm és 7 cm (239. ábra); $3\frac{1}{3}$ cm és $6\frac{2}{3}$ cm (240. ábra). **396.** 1) 40 cm; 2) 6,4 dm. **397.** 1) 80 cm; 2) 52 cm. **398.** 1) Igen; 2) nem. **399.** 1) Nem; 2) igen; 3) igen. **401.** 1) 90°; 2) 60°. **402.** 1) 10 cm; 2) 2,3 dm. **403.** 1) Igen; 2) nem. **407.** 1) Igen; 2) nem. **408.** Igen. **409.** *Útmutatás*: a kapott négyszög szomszédos oldalai legyenek egyenlők. **412.** 1) 3 mm, 10,5 mm, 18 mm, 10,5 mm; 2) 4 cm, 14 cm, 24 cm, 14 cm. **413.** *Útmutatás*: a trapéz középvonala $\frac{P}{4}$, ezért: 1) 4 cm; 2) 50 mm. **414.** 1) 20 cm; 2) 10 cm. **415.** 1) *Útmutatás*: szerkesszetek R sugarú körvonalat! Húzzatok meg benne két egymásra merőleges átmérőt! Sorba kössétek össze az átmérők végpontjait! **416.** 1) *Útmutatás*: rajzoljatok R sugarú körvonalat! Húzzatok meg benne egy tetszőleges átmérőt! Az átmérő végpontjain keresztül húzzatok a sugarú körvonalat! Vizsgáljatok meg minden lehetséges esetet! **420.** Igaz. *Útmutatás*: alkalmazzátok a húrnégyszögek tulajdonságát! **422.** *Útmutatás*: vegyétek figyelembe, hogy $h = 2r$, ahol h a rombusz magassága, r a beírt körvonal sugara. **425.** *Útmutatás*: a körvonal átmérője egyenlő a téglalap kisebbik oldalával. **426.** *Útmutatás*: húzzatok az adott körvonalban két egymásra merőleges átmérőt! **427.** *Útmutatás*: a trapéz köré írt körvonal középpontjában kell lennie a kútnak.

2. fejezet

10. §.

429. 1) $1\frac{1}{3}$; 2) 2. **431.** 1) $P_1 = 17{,}1$, $P_2 = 20{,}51$, $P_2 : P_1 = 1{,}2$; 2) $P_1 = 17{,}9$, $P_2 = 14{,}32$, $P_2 : P_1 = 0{,}8$; 3) $P_1 = 36$, $P_2 = 27$, $P_2 : P_1 = 0{,}75$; 4) $P_1 = 7{,}5$, $P_2 = 15$, $P_2 : P_1 = 2$. **433.** 1) Nem; 2) nem; 3) nem. **434.** 1) $A_1\angle = 30°$, $B\angle = 60°$, $C\angle = C_1\angle = 90°$; 2) $A\angle = A_1\angle = 80°$, $B\angle = C_1\angle = 50°$; 3) $A\angle = A_1\angle = 45°$, $B_1\angle = 110°$, $C\angle = 25°$. **435.** 1) Igen; 2) nem létezik ilyen oldalhosszúságú háromszög; 3) nem. **436.** 1) 6 cm, 7 cm; 2) 15 cm, 4,2 cm; 3) 13 cm, 18,5 cm. **437.** *Útmutatás*: alkalmazzátok először, hogy az egybevágó háromszögek megfelelő szögei egyenlők, majd a párhuzamos egyenesek ismertetőjelét! **438.** 1) $MN \parallel AC$; 2) $MN \parallel AB$; 3) $MN \parallel BC$. **439.** 1) 46 cm, 23 cm; 2) 29 cm, 70 cm; 3) 15 cm, 40 cm; 4) 31 cm, 9 cm. **440.** 1) 3 cm; 2) 3,75 cm; 3) 6 cm. **441.** 1) 5 cm, $8\frac{1}{3}$ cm, $11\frac{2}{3}$ cm; 2) 9 cm, 15 cm, 21 cm. **442.** *Útmutatás*: alkalmazzátok, hogy a hasonló háromszögek megfelelő szögei egyenlők! **443.** Igen, $k = \frac{2}{3}$. **444.** Igen, $k = 2$. **445.** 1) Nem; 2) nem. **446.** 1) Igen; 2) igen. **447.** 1) 6 cm; 2) 37,5 cm. **448.** 1) 112 cm, 64 cm; 2) 30 cm, 45 cm. **449.** 1) 12 cm; 2) 10 cm. **450.** Igen, $k = 1$. **451.** $k = \frac{1}{2}$. **452.** 1) 15 cm, 30 cm, 30 cm; 2) 3,75 cm, 11,25 cm, 11,25 cm. **453.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a hasonló háromszögek kerületéről szóló tételt! **454.** Igen. **455.** Igen, az egyenlő szárú háromszögekben. **456.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a hasonló háromszögek kerületéről szóló tételt! **457.** *Útmutatás:* nagyító alatt a szög fokmértéke nem változik. **458.** Igen. **459.** A térkép méretaránya 1 : 250 000. **460.** 45 cm, 50 cm, 25 cm. **461.** Igen.

11. §.

462. 3 : 5 (258. ábra); 4 : 3 (259. ábra). **463.** 1) *MH*; 2) *PM*; 3) *MH*. **464.** 1) Igen; 2) nem. **465.** 1) 2 : 3; 2) 5 : 1; 3) 2 : 1. **466.** 4. **467.** 1) Igen; 2) nem. **468.** 1) 4 cm, 6 cm; 2) 12 cm, 4 cm; 3) 6 cm, 8 cm; 4) 15 cm, 3 cm. **472.** 1) Igen; 2) nem; 3) nem. **473.** 1) 6 vagy 1,5; 2) 8 vagy 4,5; 3) $11\frac{2}{3}$ vagy 4,2. **476.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem; 4) nem. **477.** Igen. **478.** *Útmutatás*: alkalmazzátok Thalész tételének következményét! **479.** 1) 3 cm, 2 cm, 12 cm, 9 cm, 6 cm; 2) 8 cm, 4 cm, 24 cm, 18 cm, 12 cm; 3) 6 cm, 4,5 cm, 18 cm, 13,5 cm, 9 cm; 4) 4 cm, 3 cm, 2 cm, 9 cm, 6 cm; 5) 4 cm, 3 cm, 2 cm, 12 cm, 6 cm; 6) $6\frac{2}{3}$ cm, 5 cm, $3\frac{1}{3}$ cm, 20 cm, 15 cm. **480.** $AC = \frac{am}{m+n}$. **481.** 1) 16 cm, 32 cm, 30 cm; 2) 10 cm, 24 cm, 16 cm. **482.** 1) 15 cm, 10 cm; 2) 20 cm, 4 cm. **483.** 1) $\frac{125}{34}$ cm, $\frac{100}{17}$ cm, $\frac{50}{17}$ cm; 2) $\frac{250}{17}$ cm, $\frac{400}{17}$ cm, $\frac{200}{17}$ cm. **484.** 1) 15 cm; 2) 100 cm. **485.** 1) $BC = 16$ mm, $CL = 24$ mm, $LF = 16$ mm, $DC = 50$ mm, $KL = 20$ mm; 2) $BC = 6$ cm, $CL = 9$ cm, $LF = 6$ cm, $DC = 15$ cm, $KL = 6$ cm. **486.** 1) 3 cm, 6 cm; 2) 5,6 cm, 8,4 cm. **487.** 1) 12 cm; 2) 12 cm. **488.** 1) 15 cm, 10 cm; 2) 20 cm, 4 cm; 3) 21 cm, 3 cm. **489.** 1) 4 cm, 8 cm, 12 cm; 2) 3,1 cm, 6,2 cm, 9,3 cm. **490.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a hasonló háromszögek kerületéről szóló tételt! **491.** 1) 7,5; 2) 4,5. **493.** $\frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{a+b+c}; \frac{a+b}{a+b+c}; \frac{b+c}{a+b+c}$. **494.** 1) 21,6 cm; 2) 36 cm. **495.** *Útmutatás*: alkalmazzátok Thalész tételét! **496.** 1) *Útmutatás*: először igazoljátok, hogy az $AOB\Delta \sim DOC\Delta$; 2) 6,25 és 3,75. **497.** *Útmutatás*: az AA_1 egyenes metszi az MN-t egy O pontban. Bizonyítsátok be, hogy $AMO\Delta \sim ABA_1\Delta$ és $ANO\Delta \sim ACA_1\Delta$. **498.** 1) Nem; 2) nem, csak az egyenlő szárú trapéz esetén. **499.** 1) 8 cm, 9 cm; 2) $11\frac{1}{3}$ cm, $12\frac{2}{3}$ cm. **500.** 1) $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$, $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$. **501.** *Útmutatás*: $AOB\Delta \sim A_1OB_1\Delta$. **502.** 10 perc. **503.** 28 m. **504.** 36 m.

12. §.

507. Például egy olyan háromszög, melynek a szögei 50°, 50°, 80° és egy olyan, melynek a szögei 40°, 40°, 100°. **508.** Például egy olyan háromszög, melynek szögei 40°, 50°, 90° és egy olyan, melynek a szögei 30°, 60°, 90°. **510.** 1) $LKM\Delta \sim HOP\Delta$; 2) $MKL\Delta \sim PHO\Delta$; 3) $LMK\Delta \sim POH\Delta$. **511.** 1) Igen; 2) igen; 3) igen. **512.** Azért, mert az adott arányokból nem következik a megfelelő szögek egyenlősége. **513.** 1) $A\angle = B\angle = C\angle = 60°$, $AB = BC = AC = 2$ cm, $A_1\angle = B_1\angle = C_1\angle = 60°$, $AB_1 = BC_1 = AC_1 = 6$ cm; 2) $A\angle = B\angle = C\angle = 60°$, $AB = BC = AC = 4$ cm, $A_1\angle = B_1\angle = C_1\angle = 60°$, $AB_1 = BC_1 = AC_1 = 2$ cm; 3) $A\angle = B\angle = C\angle = 60°$, $AB = BC = AC = 9$ cm, $A_1\angle = B_1\angle = C_1\angle = 60°$, $AB_1 = BC_1 = AC_1 = 3$ cm. **514.** 1) 5 cm, 7 cm, 3 cm és 15 cm, 21 cm, 9 cm; 2) 6 cm, 8 cm, 4 cm és 4,5 cm, 6 cm, 3 cm; 3) 8 cm, 10 cm, 6 cm és 16 cm, 20 cm, 12 cm. **515.** *Útmutatás*: alkalmazzátok az egyenlő szárú háromszög ismertetőjelét és a háromszögek hasonlóságát két szög alapján! **516.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **517.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két szög alapján. **518.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két szög alapján. **519.** 1) Igen; 2) nem; 3) igen. **520.** *Útmutatás*: határozzátok meg a

háromszög hegyesszögeit, és alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két szög alapján. **521.** $a:b$ vagy $b:a$. **522.** 1) $68\frac{4}{7}$ mm, $111\frac{3}{7}$ mm; 2) 1,5 dm, 0,9 dm; 3) $6\frac{9}{11}$ cm, $18\frac{2}{11}$ cm. **523.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két szög alapján! **524.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két szög alapján! **525.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a párhuzamos egyenesek ismertetőjelét, és a háromszögek hasonlóságát két szög alapján. **526.** 10 cm, 8 cm. **527.** *Útmutatás*: vegyétek figyelembe, hogy a háromszög súlyvonalait a súlypont 2 : 1 arányban osztja a csúcstól számítva, és vizsgáljátok a kapott hasonló háromszögeket! **528.** 1) 12 cm; 2) 4 cm. **529.** *Útmutatás*: az adott egyenes és az adott háromszög leghosszabb oldala közötti egyik hajlásszög egyenlő a háromszög legnagyobb szögével. **530.** 1) 4; 2) 3; 3) 2. **531.** 1) 4,2 cm; 2) 6 cm. **532.** *Útmutatás*: az 531. feladat szerint. **533.** 1); 2). **534.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két szög alapján! **535.** *Útmutatás*: az egyenlő magasságok nem biztos, hogy a megfelelők. **536.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két szög alapján! **537.** 8 cm, 12 cm. **538.** 1) 12 cm, 36 cm; 2) 18 cm, 30 cm. **539.** *Útmutatás*: keressetek két pár hasonló háromszöget, és adjátok össze az aránypárok megfelelő oldalait! **540.** 1) 20 cm, 30 cm; 2) 9 cm, 18 cm. **541.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két szög alapján! **542.** *Útmutatás*: vegyétek figyelembe, hogy a háromszög súlyvonalait a súlypont 2 : 1 arányban osztja a csúcstól számítva, és vizsgáljátok a kapott hasonló háromszögeket! **543.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) 1; 3) $1\frac{1}{4}$. **544.** *Útmutatás*: húzzatok meg két magasságot, és vizsgáljátok meg azt a két hasonló háromszöget, melyek befogói az adott magasságok! **545.** 1) 12 cm, 24 cm; 2) 30 cm, 20 cm. **546.** *Útmutatás*: húzzátok meg a körvonal BD átmérőjét, és alkalmazzátok az azonos BC ívhez tartozó kerületi szögek tulajdonságát! **547.** *Útmutatás*: először igazoljátok az AOM és NKM valamint a BON és BKA háromszögek hasonlóságát, majd a BKA és MKN háromszögek hasonlóságát! **548.** *Útmutatás*: igazoljátok az $ABC\Delta$ és esetleg az $ALK\Delta$ hasonlóságát! **549.** *Útmutatás*: vegyétek figyelembe, hogy a $BDCM$ négyszög húrnégyszög, és a BCD valamint BMD kerületi szögek egy ívhez tartoznak! **550.** *Útmutatás*: igazoljátok, hogy a $B\angle$ nem lehet tompaszög, és vizsgáljátok az AB és CD párhuzamos egyenesek és egy harmadik egyenes metszésekor keletkezett egy oldalon lévő belső szögeit! **551.** 195 m. **552.** *Útmutatás*: rajzoljatok az adott háromszöggel hasonló háromszöget! Húzzatok a megfelelő oldalakkal párhuzamos egyeneseket! **553.** 189,65 m. **554.** *Útmutatás*: három félegyenes közül az egyiken vegyetek fel két pontot, és húzzatok rajtuk keresztül a másik két félegyenesre párhuzamos egyeneseket! Vizsgáljátok az így kapott hasonló derékszögű háromszögeket!

13. §.

557. Például egy olyan háromszög, melynek oldalai 10 cm és 16 cm, az általuk bezárt szög pedig 50°. **559.** Nem. **560.** 10 cm, 12 cm, 18 cm. **562.** 1) $a = LM$, $b = LK$, $ka = HP$, $kb = HO$, $LMK\Delta \sim HPO\Delta$; 2) $a = MK$, $b = ML$, $ka = PO$, $kb = PH$, $MKL\Delta \sim POH\Delta$. **563.** 1–3. **564.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **565.** 1) AB = 5 cm, BC = 7 cm, AC = 3 cm, KL = 15 cm, LM = 21 cm, KM = 9 cm; 2) AB = 6 cm, BC = 8 cm, AC = 4 cm,

$KL = 4{,}5$ cm, $LM = 6$ cm, $KM = 3$ cm; 3) $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, $AC = 6$ cm, $KL = 16$ cm, $LM = 20$ cm, $KM = 12$ cm. **566.** Igen. **567.** Első és harmadik. **568.** 1) 144 cm, 96 cm, 48 cm; 2) 40 cm, $26\frac{2}{3}$ cm, $13\frac{1}{3}$ cm; 3) 56 cm, $37\frac{1}{3}$ cm, $18\frac{2}{3}$ cm. **569.** 1) 6,4 mm, 10,4 mm, 38,4 mm, 62,4 mm; 2) 6 cm, 10 cm, 12 cm, 20 cm; 3) $2\frac{2}{3}$ cm, $6\frac{2}{3}$ cm, $6\frac{2}{3}$ m, $16\frac{2}{3}$ cm. **570.** Első és második. **571.** 1) 21 cm, 27 cm, 36 cm; 2) 119 cm, 56 cm, 105 cm; 3) 30 cm, 25 cm, 45 cm. **572.** 1) 24 cm; 2) 27 cm; 3) 128 cm. **573.** 1) 36 mm; 2) 0,9 dm; 3) 16 cm. **574.** *Útmutatás*: írjátok fel az adott szorzatok egyenlőségét aránypár alakjában! **575.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két oldal és a közbezárt szög alapján! **576.** Lehet, hogy az egyenlő súlyvonalak nem megfelelők. **577.** 12. **578.** 1) 2 : 7; 2) 1 : 4. **579.** *Útmutatás*: legyen az O pont a BH és CM magasságok metszéspontja. A BC oldalra, mint átmérőre szerkesszetek körvonalat, és igazoljátok a BOC és MOH háromszögek hasonlóságát! **580.** 2. **581.** 1) 2 : 1; 2) 1 : 2. **582.** 5. **583.** 1) 1 : 3; 2) 1 : 2. **584.** 1) Nem; 2) igen; 3) igen. **585.** *Útmutatás*: a háromszögek hasonlóságának (három oldal alapján) bizonyításához hasonló, a feladatban szereplő bizonyítás. **586.** $\frac{ma}{1+m}$. **587.** 2 : 1. **588.** 60°, 120°. **589.** 1) $\frac{a+mb}{1+m}$; 2) $\frac{2ab}{a+b}$; 3) $\frac{2ab}{a-b}$. **590.** *Útmutatás*: keressetek a rajzon három pár hasonló háromszöget! **591.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{3}{7}$. **592.** *Útmutatás*: igazoljátok, hogy az adott négy pont egy olyan négyszög négy csúcsa, melyben a szemben fekvő szögeinek összege 180°. **593.** 3 : 2. **594.** 1 : 1. **595.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két szög alapján! **596.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két szög alapján! **597.** ≈14 m. **599.** *Útmutatás*: az AKB háromszögben húzzátok meg az AB oldallal párhuzamos középvonalat, és vizsgáljátok az így kapott hasonló háromszögeket!

14. §.

601. 1) 36, 6; 2) 25, 5; 3) 9, 3; 4) 16, 4. **604.** 1) 25, 20, 15, 12; 2) 169, 65, 156, 60; 3) 289, 136, 255, 120. **605.** 1) Igen; 2) nem; 3) nem. **606.** *Útmutatás*: a derékszögből húzzátok meg a háromszög magasságát, és vizsgáljátok a kapott hasonló háromszögeket! **607.** 1) 2; 2) 2; 3) 6. **608.** 1) 4 cm; 2) 2 cm; 3) 5 cm; 4) 6 cm. **609.** *Útmutatás*: alkalmazzátok az átmérőre rajzolt kerületi szög tulajdonságát! **610.** *Útmutatás*: a 609. feladat szerint. **612.** 1) 8 cm, 12 cm; 2) $5\frac{5}{13}$ cm, $4\frac{8}{13}$ cm; 3) 1,5 cm, 2,5 cm; 4) 3 cm, 9 cm. **613.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszög súlyvonalának és magasságának tulajdonságait! **614.** *H.* **616.** *Útmutatás*: alkalmazzátok az átfogóra húzott magasság tulajdonságát! **617.** 1 : 3 vagy 3 : 1. **618.** 1 : 3. **619.** 30°, 60°, 90°. **621.** 1) 4,8; 2) 6,72. **622.** 1) 24 cm; 2) 120 mm. **623.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságát két oldal és a közbezárt szög alapján! **624.** *Útmutatás*: a 624.(1) feladat szerint. **625.** *Útmutatás*: a 624.(2) feladat szerint. **626.** *Útmutatás*: a 624.(3) feladat szerint. **627.** Két eset lehetséges. **632.** 1) *Útmutatás*: alkalmazzátok azt a tételt, hogy a háromszögnek oldalaihoz tartozó középponti szögek kétszer nagyobbak a háromszög megfelelő belső szögénél. **633.** Nem. **635.** *Útmutatás*:

alkalmazzátok a derékszögű háromszögben az átfogóra húzott magasságról szóló tételt és annak következményeit! **636.** *Útmutatás*: a tompaszög csúcsán keresztül húzzatok a szárral párhuzamos egyenest; vizsgáljátok a kapott derékszögű háromszöget és ebben a háromszögben az átfogóra húzott magasságot! **637.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszög szögfelezőjének tulajdonságát! **638.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszög szögfelezőjének tulajdonságát! **639.** 1) $\frac{ab}{b+c}$, $\frac{ac}{b+c}$; 2) $\frac{ab}{b-c}$, $\frac{ac}{b-c}$, $b \neq c$. **640.** $\frac{a+b}{c}$. **641.** $0{,}5a$. **642.** *Útmutatás*: igazoljátok, hogy az a háromszög, melynek egyik csúcsa a középső körvonal középpontja, a másik két csúcsa pedig a másik két körvonal és a szög egyik szárának érintőpontjai – derékszögű! **643.** *Útmutatás*: alkalmazzátok az azonos ívre támaszkodó kerületi szögek tulajdonságát! **649.** *Útmutatás*: a 609. feladat szerint. **650.** *Útmutatás*: ahhoz, hogy megszerkesszétek azokat a pontokat, melyek nem végpontjai az egymásra merőleges két átmérőnek, osszátok fel az átmérőt 1 : 9 arányban, és alkalmazzátok az átfogóra húzott magasság tulajdonságát! **651.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszög szögfelezőjének tulajdonságát! **654.** *Útmutatás*: három pontnak: a szemnek, a fa tetejének és a jelzőoszlop tetejének egy egyenesen kell lenni. Ezt úgy érhetitek el, hogy olyan messzire távolodtok el a jelzőoszloptól, hogy teteje egybeessen a fa tetejével.

3. fejezet

15. §.

657. 1) 14 cm; 2) 20 cm; 3) 18 cm. **659.** 1) hétszög; 2) nyolcszög. **661.** 1) 5; 2) 5; 3) 5. **662.** 1) 540°; 2) 1260°; 3) 2700°. **663.** 1) 10; 2) 8; 3) 11. **664.** 1) 4; 2) 10; 3) 15. **665.** 1) 30°, 60°, 120°, 150°, 180°; 2) 80°, 100°, 110°, 110°, 140°; 3) 100°, 110°, 120°, 90°, 120°; 4) 20°, 100°, 140°, 180°, 100°. **666.** 1) 90°; 2) 36°; 3) 24°. **667.** Hétszög. **669.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **670.** 1) 35; 2) 119. **671.** 1) Nem; 2) nem. **672.** Nem. **673.** 1) 5; 2) 6. **674.** 1) 6:5:4:2:1; 2) 8:7:5:4:3. **675.** *Útmutatás*: a sokszög külső és belső szögének összege 180°. **676.** $\frac{360°}{n}$. **677.** 1) 6; 2) 9. **678.** 1) 8,4 cm vagy 40,4 cm. **679.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszög egyenlőtlenséget! **681.** 1) 3 és 6; 2) 6 és 3; 4 és 4. **683.** 1) 4; 2) 6; 3) 7. **684.** *Útmutatás*: vizsgáljátok azt a háromszöget, melynek egyik oldala az adott sokszög oldala is, az oldallal szembeni csúcsa pedig a beírt körvonal középpontja! **685.** *Útmutatás*: legyen a körvonal középpontja O, igazoljátok, hogy a BOD háromszög derékszögű, és alkalmazzátok az átfogóra húzott magasság tulajdonságát!

16. §.

686. 11 négyzetegység (357. ábra); 12 négyzetegység (358. ábra). **687.** 4 cm^2 (359. ábra); 8 cm^2 (360. ábra); 2 cm^2 (361. ábra). **688.** 1) 7,5 cm^2; 2) 5 cm^2; 3) 22,5 cm^2. **689.** 1) 4 cm; 2) 3 cm; 3) 11 cm. **691.** 1) 96 cm^2; 2) 160 cm^2. **692.** 1) 3-szorosára nő; 2) 4-edére csökken; 3) 1,5-szeresére nő. **693.** 1) 9-szeresére nő; 16-odára

csökken; 3) 2,25-szorosára nő. **694.** 1) $b = 1{,}5$ cm; $S = 6$ cm^2; 2) $a = 0{,}5$ cm; $P = 25$ cm; 3) $a = 3{,}5$ cm; $S = 24{,}5$ cm^2; 4) $b = 0{,}5$ cm; $P = 17$ cm. **695.** 1) 20; 30; 2) 15; 40. **696.** 1) 2 cm^2; 2) 4,5 cm^2; 3) $\frac{25}{2}$ cm^2. **697.** 1) 24 cm, 26 cm; 2) 24 cm, 40 cm; 3) 40 cm, 50 cm. Négyzet. **698.** $\frac{7a^2}{9}$ (364. ábra); $\frac{5a^2}{9}$ (365. ábra). **699.** 1) 81 cm^2, 25 cm^2; 2) 361 cm^2, 256 cm^2. **700.** 1) 56 cm, 40 cm; 2) 200 cm, 176 cm. **701.** $\sqrt{\frac{mS}{n}}$; $\sqrt{\frac{nS}{m}}$. **702.** $\frac{nP}{2(m+n)}$; $\frac{nP}{2(m+n)}$. **703.** 1) az $a + b$ oldalhosszúságú téglalap területe egyenlő az a és a c, valamint a b és a c oldalhosszúságú téglalapok területeinek összegével; 2) az $a - b$ oldalhosszúságú téglalap területe egyenlő az a és c, valamint a b és c oldalhosszúságú téglalapok területeinek különbségével. **704.** 1) 1 cm; 2) 2 cm. **705.** 25 cm^2. **707.** 9 cm^2, 1 cm^2, 7 cm^2, 7cm^2. **708.** Igen. *Útmutatás*: igazoljátok, hogy az AB és BC oldalú négyzetek területeinek összege egyenlő az AC négyzet területe, mínusz az AB és BC oldalú téglalap területének kétszerese. **709.** *Útmutatás*: a derékszögű háromszög területe egyenlő azoknak a derékszögű háromszögeknek a területével, amelyekre a magasság osztja az adott háromszöget. **713.** 250 m^2. **714.** Igen. **715.** 42,9 m^2.

17. §.

721. Igen (373. ábra); nem (374. ábra); igen (375. ábra). **722.** 45 négyzetegység (376. ábra); 42 négyzetegység (377. ábra). **723.** 24 négyzetegység. **724.** 1) 3000 cm^2; 2) 1000 cm^2; 3) 2500 cm^2. **725.** 1) 80 cm^2; 2) 300 cm^2; 3) 30 cm^2. **726.** 1) 4 cm; 2) 5 cm; 3) 3 cm. **727.** 1) $h_a = 8{,}2$ cm; $h_b = 4{,}1$ cm; 2) $h_a = 4$ cm; $h_b = 2$ cm; 3) $h_a = 4{,}5$ cm; $h_b = 3$ cm; 4) $h_a = 4$ cm; $h_b = 6{,}4$ cm. **728.** 1) 8 cm; 2) 5 cm; 3) 4 cm. **729.** 1) 4 cm; 2) 12 mm; 3) 15 cm. **730.** *Útmutatás*: húzzátok meg a paralelogramma átlóit, majd az átlók metszéspontján keresztül az oldalakkal párhuzamos egyeneseket! Igazoljátok, hogy az így kapott nyolc háromszög mindegyikének a területe egyenlő a paralelogramma területének $\frac{1}{8}$-ával! **731.** Igen. **732.** 1) 96 cm^2; 2) 2,4 dm^2; 3) 840 mm^2. **733.** *Útmutatás*: alkalmazzátok, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra, és metszéspontjukban felezik egymást! **734.** 1) 100 cm^2; 2) 120 cm^2; 3) 72 cm^2. **735.** 1) 8 cm^2; 2) 4,5 cm^2; 3) 0,72 m^2. **736.** 1) 75 cm^2; 2) 250 cm^2. **737.** 1) $75\sqrt{3}$ mm^2; 2) $250\sqrt{3}$ mm^2. **738.** 2) 3,38 cm^2. **739.** 1) 8 cm; 3 cm; 2) $\frac{3}{2}$ dm; 6 dm. **740.** 1) 30 cm; 2) 30 cm. **741.** 1) 128 cm^2; 2) 140 cm^2. **742.** *Útmutatás*: ha egyenlő területű háromszögekből levágunk egyenlő területű háromszögeket, akkor egyenlő területű síkidomokat kapunk. **743.** 1) $3\sqrt{6}$ cm; $4\sqrt{6}$ cm; 2) $4\sqrt{3}$ cm; $6\sqrt{3}$ cm; 3) $6\sqrt{2}$ cm; $6\sqrt{2}$ cm. **744.** 4 cm. **745.** 30°. **746.** 1 : 2. **747.** 48 cm^2. **748.** *Útmutatás*: először igazoljátok, hogy a rombuszt átlója két egyenlő szárú háromszögre osztja, majd a rombusz területét és a magasságok által meghatározott háromszögek területét fejezzétek ki a rombusz oldalán és magasságán keresztül! **750.** *Útmutatás*: az AMD és CMD háromszögeket az M csúcsból húzott magasság derékszögű háromszögekre bontja. Igazoljátok, hogy a háromszögek területeinek összege egyenlő a rombusz területének felével! **751.** Az átló egyenlő azzal az oldallal,

amelyre merőleges. **752.** 1) 24 cm^2. **753.** Két, a paralelogramma adott oldalától $\frac{S}{h}$ távolságra lévő az oldallal párhuzamos egyenes. **755.** 24 500 m^2. **757.** A téglalap területe nagyobb a paralelogramma területénél.

18. §.

760. 1) Nem; 2) igen; 3) nem; 4) nem; 5) nem; 6) nem. **761.** 10 n. e. (390. ábra); 42,5 n. e. (391. ábra); 210 n. e. (392. ábra). **762.** 1) 15 cm^2; 2) 5 dm^2; 3) 1250 cm^2. **763.** 1) 40 cm^2; 2) 1,5 dm^2; 3) 108 mm^2. **764.** 1) 12 cm; 2) 31 cm; 3) 20 cm. **765.** 1) $h_a = \frac{168}{13}$ cm, h_b = 12 cm, $h_c = \frac{168}{15}$ cm; 2) $h_a = \frac{252}{13}$ cm, h_b = 12,6 cm, h_c = 12 cm; 3) h_a = 12 cm, $h_b = \frac{42}{15}$ cm, h_c = 2,1 cm; 4) h_a = 8 cm, h_b = 7,2 cm, $h_c = \frac{72}{17}$ cm. **766.** 1) Nem változik; 2) 2-szeresére nő; 3) 2-szeresére nő. **767.** *Útmutatás*: hasonlítsátok össze a háromszögek magasságait és alapjait! **768.** Felére. **769.** 0,25. **770.** 1) 210 cm^2; 2) 84 cm^2; 3) 420 cm^2. **771.** 1) p = 42 cm, S = 210 cm^2; 2) p = 27 cm, S = 126 cm^2; 3) p = 21 cm, S = 42 cm^2; 4) p = 45 cm, S = 240 cm^2. **772.** 1) 39 cm^2; 2) 60 cm^2. **773.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszög középvonalának tulajdonságát! **774.** 1) 18 cm, 80 cm; 2) 48 cm, 55 cm. **775.** 1) 39 cm^2; 2) 34 cm^2. **776.** 1) $8\sqrt{3}$ cm^2; 2) $18\sqrt{3}$ cm^2. **777.** 1) $16\sqrt{3}$ cm^2; 2) $36\sqrt{3}$ cm^2. **778.** 1) 24 cm^2; 2) 120 cm^2. **779.** $h_c < h_b < h_a$. **780.** *Útmutatás*: mérjétek le a háromszögek megfelelő oldalait! **781.** *Útmutatás*: alkalmazzátok azt a szabályt, hogy a súlyvonalak metszéspontja a háromszög csúcsától számítva 2 : 1 arányban osztja a súlyvonalakat. **782.** 1) $\frac{16}{3}$ cm; 2) $\frac{16}{3}$ cm; 3) $\frac{8}{3}$ cm. **783.** *Útmutatás*: először kössétek össze az adott pontot a háromszög csúcsaival, majd számítsátok ki a háromszög területét, mint a kapott három háromszög területének összegét! **784.** Az adott oldallal párhuzamos egyenes, melyek távolsága az adott oldaltól egyenlő az oldalra húzott magassággal. **785.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszög területe kiszámításának két képletét. **786.** $\frac{S_{ABC\triangle}}{n}$. **787.** 7 S, ahol S az adott háromszög területe. **788.** $1:\sqrt{2}-1:\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **789.** $4 \cdot \sqrt{\frac{m}{m+n}}$. **792.** *Útmutatás*: az ABC és ACM háromszögek területei egyenlők, ezért az ABC területe egyenlő az AM szakasz és a vonalzó szélességének félszorzatával. **795.** 0,927 kg.

19. §.

797. 1) Nem; 2) nem; 3) igen; 4) nem; 5) nem; 6) igen. **798.** 300 n. e. (408. ábra); 150 n. e. (409. ábra). **799.** 1) 2400 cm^2; 2) 1400 cm^2; 3) 4000 cm^2. **800.** 1) 90 cm^2. **801.** 1) 10 cm; 2) 12 cm; 3) 12 cm. **802.** 1) 4 cm; 2) 5 cm; 3) 3 cm. **803.** 1) q = 12 cm, S = 84 cm^2; b = 27 cm, h = 5 cm; 3) a = 20 cm, q = 21 cm; 4) a = 23 cm, h = 11 cm. **804.** 1) Nem változik; 2) nem változik; 3) 2-szeresére nő. **805.** 1) 20 cm, 16 cm;

2) 36 cm, 24 cm; 3) 20 cm, 10 cm. **806.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **807.** 1) 645 cm^2; 2) 180 cm^2. **808.** 1) 10,5 cm^2; 2) 8 cm^2. **809.** 1) 6 cm^2; 2) 13,5 cm^2. **810.** 45°. **811.** 1) 5,6 cm^2; 2) 96 cm^2. **812.** Két eset lehetséges: 8 cm és 12 cm vagy 2 cm és 6 cm. **813.** 12 cm. **814.** *Útmutatás*: ha a trapéz érintő trapéz, akkor az alapok összege egyenlő a szárak összegével. **815.** $\frac{2S}{P}$. **816.** 10 cm. **817.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a trapéz középvonalának tulajdonságát! **818.** 16-tól 32 cm-ig. **819.** $\frac{2ab}{a+b}$. **820.** *Útmutatás*: igazoljátok, hogy a *BOC* és *COD* háromszögek, valamint az *AOB* és a *BOC* háromszögek területeinek aránya egyenlő az *AB* : *CD* aránnyal! **821.** $\left(\frac{m}{n}\right)^2 : 1 : \frac{m}{n} : \frac{m}{n}$. **822.** 90°. **823.** $\frac{4dc}{5}$. **824.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a derékszögű háromszögben az átfogóra húzott súlyvonal tulajdonságát! **825.** *Útmutatás*: igazoljátok, hogy a keletkezett háromszögek közül a másik kettő területének az összege egyenlő a trapéz területének felével! **826.** *Útmutatás*: igazoljátok, hogy ezen trapézok bármelyikének területe egyenlő az adott háromszög területének a felével! **827.** 346 500 n. e. **828.** *Útmutatás*: a négyszöget bontsátok fel derékszögű háromszögekre, és számítsátok ki a háromszögek területét! **829.** *Útmutatás*: igazoljátok, hogy a trapéz rövidebb szárának és a keresett egyenesnek a távolsága egyenlő a trapéz középvonalának a felével! **830.** Nem elegendő.

4. fejezet

20. §.

831. 3). **832.** Igen (425. ábra); nem (426. ábra). **834.** 3). **835.** 1) 13 cm; 2) 15 cm; 3) 16 cm. **836.** 1) 5 cm; 2) 8 m; 3) 12*a*. **837.** 1) $a = 12$ cm; 2) $b = 16$ cm; 3) $c = 10a$. **838.** 1) $d = 25$ cm; 2) $b = 24$ cm; 3) $b = 9a$. **839.** *Útmutatás*: húzzátok meg a téglalap átlóját, és a kapott derékszögű háromszögben alkalmazzátok Pitagorasz tételét! **840.** 4 cm. **841.** 1) $\sqrt{2}$ cm; 2) 8 cm; 3) $a\sqrt{2}$. **842.** 1) 1 cm; 2) $4\sqrt{2}$ cm; 3) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$. **843.** 1) 1,5 cm; 2) $5\sqrt{3}$ cm; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **844.** 1) 24 cm; 2) 15 cm; 3) 12 cm. **845.** 1) 15 cm; 2) 20 cm. **846.** 1) 5 cm; 2) 15 cm; 3) 10 cm. **847.** *Útmutatás*: alkalmazzátok Pitagorasz tételét a rombusz két szomszédos csúcsa és az átlók metszéspontja által meghatározott derékszögű háromszögben! **848.** 1) 26 cm; 2) 8 cm; 3) 15 cm. **849.** 17 cm (429. ábra); $6\sqrt{2}$ cm (430. ábra); 13 cm (431. ábra). **850.** 1) 5 cm, 12 cm, 13 cm; 2) 7 cm, 24 cm, 25 cm. **851.** 1) 15 cm, 20 cm; 2) 12 cm, 16 cm. **852.** 1) 9 cm, 12 cm, 15 cm; 2) 30 cm, 16 cm, 34 cm. **853.** 1) 15 cm, 18 cm; 2) 16 cm, 17 cm. **854.** 1) 9 cm, $3\sqrt{73} \approx 25{,}6$ cm; 2) 24 cm, $2\sqrt{193} \approx 27{,}8$ cm. **855.** 1) 10 cm; 2) $\sqrt{41} \approx 6{,}4$ cm. **856.** *Útmutatás*: két derékszögű háromszöget vizsgáljatok, melyek egyik befogója a trapéz rövidebb szára! **857.** 8 cm (432. ábra); 5 cm (433. ábra); 14 cm (434. ábra). **858.** 1) 20 cm; 2) 13 cm. **859.** 1) 10 cm; 2) 25 cm.

860. 1) 4 cm; 2) 6 cm. **861.** 1) 8 cm vagy 22 cm; 2) 38 cm vagy 88 cm. **862.** 8 cm. **865.** 1) 10 cm; 2) $5\sqrt{2}$ cm. **866.** 21 cm vagy 11 cm. **867.** 1) 6 cm, 15 cm; 2) 8 cm. **868.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a derékszögű háromszögek egybevágóságát két befogó alapján! **869.** *Útmutatás*: alkalmazzátok Pitagorasz tételét! **870.** 1) 120 cm; 2) $34+8\sqrt{34} \approx 80{,}6$ cm. **871.** 1) 61 cm, 11 cm; 2) 37 cm, 12 cm. **872.** 1) 37 cm, $\sqrt{769} \approx 27{,}7$ cm; 2) 20 cm, $2\sqrt{205} \approx 28{,}6$ cm. **873.** 1) 8 cm, 9,6 cm, 9,6 cm; 2) 12 cm, 5,6 cm, 4,2 cm. **874.** *Útmutatás*: legyen az adott *ABCD* paralelogramma, *O* az átlók metszéspontja. Húzzatok az *AD* átlóra a *B* és *C* csúcsokból merőlegeseket! A kapott derékszögű háromszögekben alkalmazzátok Pitagorasz tételét! **875.** *Útmutatás*: a 874. feladat szerint. **876.** *Útmutatás*: alkalmazzátok Pitagorasz tételét! **877.** *Útmutatás*: az adott négyzetben húzzátok meg az átlókat! Az átlók felére szerkesztett négyzetek a keresettek. **878.** *Útmutatás*: alkalmazzátok Pitagorasz tételét! **880.** 6 cm. **881.** *Útmutatás*: húzzátok meg $BE \parallel CD$ egyeneseket, és igazoljátok, hogy *AE* átmérő és $CE = DB$! **883.** $\sqrt{241} \approx 15{,}5$ m. **884.** 328 m. **885.** 12,5 m. **886.** 1) 6,5 m; 2) 6,7 m. **887.** 12 láb.

21. §.

889. 1) b; 2) c; 3) b. **890.** 1) a; 2) b; 3) c. **893.** $\sin\alpha \approx 0{,}5$, $\cos\alpha \approx 0{,}9$, $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}5$. **896.** 1) $\sin 35° \approx 0{,}57$, $\cos 35° \approx 0{,}82$, $\operatorname{tg} 35° \approx 0{,}7$; 2) $\sin 40° \approx 0{,}64$, $\cos 40° \approx 0{,}77$, $\operatorname{tg} 40° \approx 0{,}84$; 3) $\sin 75° \approx 0{,}97$, $\cos 75° \approx 0{,}26$, $\operatorname{tg} 75° \approx 3{,}73$. **897.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **898.** 1) Igen; 2) igen; 3) igen. **899.** 1) $\sin A = 0{,}8$; $\cos A = 0{,}6$; $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$; 2) $\sin B = 0{,}6$; $\cos B = 0{,}8$; $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$. **900.** 1) 0,96; 2) 0,96; 3) $\frac{24}{7}$. **901.** 1) $\sin A = 0{,}8$; $\cos A = 0{,}6$; 2) $\sin B = 0{,}6$; $\cos B = 0{,}8$. **902.** 1) *Útmutatás*: legyen egy derékszögű háromszög egyik befogója 3 cm, akkor az átfogója 5 cm. Szerkesszetek ilyen oldalhosszúságú derékszögű háromszöget, és a 3 cm-es oldallal szembeni szög lesz a keresett. **903.** *Útmutatás*: a 902. feladat szerint. **904.** *Útmutatás*: a 902. feladat szerint. **906.** 1) 0,8; 0,6; $\frac{4}{3}$; 2) 0,6; 0,8; $\frac{3}{4}$. **907.** 1) 0,8; 0,6; 2) $\frac{15}{17}$, $\frac{8}{17}$. **908.** 0,96; 0,28; $\frac{24}{7}$. **909.** 1) 0,86; 2) 0,38; 3) 1,33. **911.** 10 cm és 6 cm. **912.** 1) 8 cm és 10 cm; 2) 15 cm és 39 cm; 3) 12 cm és 16 cm; 4) 45 cm és 108 cm. **914.** 8 m.

22. §.

915. 2), 4), 5). **916.** 2). **917.** 3). **918.** 2). **919.** $c \cdot \cos\alpha$ (456. ábra); $c \cdot \sin\alpha$ (457. ábra); $b \cdot \operatorname{tg}\alpha$ (458. ábra); $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$ (459. ábra); $\frac{a}{\sin\alpha}$ (460. ábra); $\frac{b}{\cos\alpha}$ (461. ábra). **921.** 1) 3 cm; 2) 8 cm; 3) 12 cm. **922.** 1) 2 cm; 2) 4 cm; 3) 6 cm. **923.** 1) 128 cm; 2) 16 cm; 3) 10 cm. **924.** 1) 64 cm; 2) 50 cm; 3) 10 cm. **925.** 1) 4,8 cm; 2) 48 cm; 3) 16,5 cm. **926.** 1) $BC = c \cdot \cos\beta$, $AC = c \cdot \sin\beta$; 2) $AB = \frac{a}{\sin\alpha}$, $AC = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$; 3) $AB = \frac{b}{\sin\beta}$, $BC = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$. **927.** $b \cdot \sin\alpha$. **928.** $l \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$. **929.** 1) $2b \cdot \cos\alpha$; 2) $b \cdot \sin\alpha$. **930.** 1) $\frac{h}{\sin\alpha}$;

2) $\frac{2h}{\operatorname{tg}\alpha}$. **931.** 1) $\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **932.** $\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}$; $\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ (462. ábra); $\frac{a\cos\beta}{\sin\alpha}$ és $\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ (463. ábra); $a\cdot\sin\alpha$ és $a\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$ (464. ábra). **933.** $2m\cdot\cos\alpha$, $2m\cdot\sin\alpha$. **934.** $\frac{b}{2\cos\alpha}$. **935.** 1) $\frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{r}{\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **936.** $\frac{h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$. **937.** $\frac{a}{2\cos\alpha}$. **938.** 1) $\frac{a}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **939.** $r\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right)$, $r\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)$, $r\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)$. **940.** 1) $\frac{m}{\sin\alpha}$, $\frac{m}{\sin\beta}$; 2) $\frac{m(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ vagy $\frac{m(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. **941.** $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sin\beta}$. **943.** $\frac{b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **944.** 1) $\frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; 2) $d\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **945.** $b+2c\cdot\cos\alpha$. **946.** $a-2c\cdot\sin\alpha$. **947.** 1) $\frac{h}{\cos\alpha}$; 2) $b+2h\cdot\operatorname{tg}\alpha$. **948.** $\frac{b\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$, $\frac{b\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$. **949.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszög területének képletét, és fejezzétek ki a 33. táblázat 1. és 2. képletei segítségével (180. old.) az egyik befogót! **951.** 1) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}8$.

23. §.

952. 1) 60°; 2) 20°; 3) 5°. **954.** 1) 1; 2) 2; 3) 1. **957.** 1) $\sin\alpha$; 2) $2\sin\alpha$; 3) $\cos\alpha$. **958.** 2 cm (471. ábra); 4 cm (472. ábra); 10 cm (473. ábra); 12 cm (474. ábra); 10 cm (475. ábra); 7 cm (476. ábra). **959.** 1) 2 cm; 2) 9 cm; 3) 8 cm. **960.** 1) 6 cm; 2) 6 cm; 3) 7 cm. **961.** 1) 2 cm; 2) 5 cm; 3) 9 cm. **962.** 1) 5 cm; 2) $5\sqrt{3}$ cm. **963.** 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°. **964.** 1) 1; 2) 2; 3) 2,5; 4) 2. **967.** 1) 1; 2) $3\sin\alpha$; 3) $1-\cos^2\alpha$. **968.** 4 cm. **969.** 18 cm. **970.** 1) $10\sqrt{3}$ cm; 2) 5 cm; 3) $5\sqrt{3}$ cm. **971.** 1) 8 cm és $8\sqrt{3}$ cm; 2) $2\sqrt{2}$ cm és $2\sqrt{2}$ cm. **972.** $2\sqrt{3}$ cm és 6 cm (477. ábra); $3\sqrt{3}$ cm és 9 cm (478. ábra); 4 cm és $2\sqrt{3}$ cm (479. ábra). **973.** 4 cm, $4\sqrt{3}$ cm. **974.** 12 cm és 12 cm. **975.** 1) $12\sqrt{3}$ cm és 24 cm; 2) 12 cm és $12\sqrt{3}$ cm. **976.** $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **977.** 1) 4 cm; 2) $4\sqrt{3}$ cm. **978.** $\sqrt{2}$. **979.** 1) $5\sqrt{2}$ cm és 10 cm; 2) 5 cm és $5\sqrt{3}$ cm. **980.** 1) $5\sqrt{3}$ cm; 2) 3 cm. **981.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 6; 3) 2. **983.** 1) $1+\sqrt{3}$ cm és $3+\sqrt{3}$ cm; 2) $2+\sqrt{2}$ cm és $2+\sqrt{2}$ cm. **984.** $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}\approx 0{,}9$ cm, $\sqrt{3}-1\approx 0{,}73$ cm. **985.** $2R+\frac{4R\sqrt{3}}{3}$ és $2\sqrt{3}R+4R$. **986.** 1) 4 cm; 2) $2\sqrt{3}$ cm; 3) $2\sqrt{19}$ cm. **987.** $96\sqrt{3}$ cm^2. **988.** 24 cm és 56 cm. **989.** 40 cm és 40 cm. **990.** 24 cm és 36 cm. **991.** 10 cm és 24 cm. **992.** $60+\frac{20\sqrt{3}}{3}\approx 71{,}5$ m. **993.** 100 m.

24. §.

995. ≈ 51°19' és ≈ 38°41' (492. ábra); ≈ 53°8' és ≈ 36°52' (493. ábra). **996.** 1) ≈ 4,1; 2) ≈ 10,67; 3) ≈ 4,69. **997.** 1) ≈ 11,52 és ≈ 14,62; 2) ≈ 13,76 és ≈ 17,01. **998.** 1) ≈ 5,92; 2) ≈ 12,69. **999.** 1) ≈ 48°35'; 2) ≈ 53°8'; 3) ≈ 63°26'. **1000.** 1) ≈ 45°34'; 2) ≈ 44°26'. **1001.** ≈ 78°28', ≈ 11°32'. **1002.** 1) ≈ 36°52'; 2) ≈ 41°59'; 3) ≈ 26°34'. **1003.** 1) ≈ 73°44'; 2) ≈ 83°58'; 3) 90°. **1004.** 1) a) $c = 29$, $\alpha \approx 43°36'$, $\beta \approx 46°24'$; b) $c = 15$, $\alpha \approx 36°52'$, $\beta \approx 53°8'$; c) $c = 30$, $\alpha \approx 53°8'$, $\beta \approx 36°52'$; d) $c \approx 46{,}56$; $\alpha \approx 30°19'$; $\beta \approx 59°41'$; 2) a) $b = 8$, $\alpha \approx 61°56'$, $\beta \approx 28°4'$; b) $b = 12$, $\alpha \approx 53°8'$, $\beta \approx 36°52'$; c) $b = 33$, $\alpha \approx 59°29'$, $\beta \approx 30°31'$; d) $a \approx 0{,}68$; $\alpha \approx 13°25'$; $\beta \approx 76°35'$; 3) a) $a \approx 7{,}52$; $b \approx 2{,}74$; $B\angle = 20°$; b) $a \approx 54{,}87$; $b \approx 60{,}94$; $B\angle = 48°$; c) $a \approx 9{,}73$; $b \approx 15{,}38$; $B\angle = 57°40'$; d) $a \approx 4{,}24$; $b \approx 1{,}94$; $B\angle = 24°45'$; 4) a) $b \approx 7{,}5$, $c \approx 14{,}15$, $B\angle = 58°$; b) $b \approx 5{,}5$, $c \approx 18{,}82$, $B\angle = 73°$; c) $b \approx 16{,}12$, $c \approx 20{,}1$, $B\angle = 36°40'$; d) $b \approx 1{,}31$, $c \approx 3{,}94$, $B\angle = 70°30'$. **1005.** ≈ 14,8 cm és ≈ 20,15 cm. **1006.** 1) ≈ 6,21 cm ; 2) ≈ 11,59 cm. **1007.** 1) ≈ 6,71 cm; 2) ≈ 8,19 cm. **1008.** 1) ≈ 23,04 cm; 2) ≈ 65°42'. **1009.** 1) ≈ 41,21 cm; 2) ≈ 46,26 cm; 3) ≈ 36,72 cm és ≈ 9,54 cm. **1010.** 1) ≈ 17,15 cm és ≈ 36,88 cm; 2) ≈ 8,31 cm és ≈ 33,69 cm. **1011.** ≈ 21,07 cm^2. **1012.** ≈ 2,94 cm és ≈ 4,70 cm. **1013.** ≈ 31,75 cm és ≈ 125,03 cm. **1014.** ≈ 15,21 cm és ≈ 35,83 cm. **1015.** ≈ 119,14 cm. **1016.** ≈ 130,03 cm^2. **1017.** ≈ 3,4 cm. **1018.** ≈ 123,3 cm. **1019.** ≈ 60°57'. **1020.** ≈ 0°57'. **1021.** 1) ≈ 0,118 km; 2) ≈ 0,433 km. **1022.** ≈ 2239 m. **1023.** ≈ 79,5 m. **1024.** ≈ 130 m. **1025.** ≈ 71,76 m. **1026.** ≈ 1°26'. **1027.** ≈ 1°17'. **1028.** ≈ 403 m. **1029.** ≈ 2149 m. **1030.** ≈ 129,1 m.

ISMÉTLÉS

1031. 1) *Útmutatás*: alkalmazzátok a háromszögek egybevágóságát két oldal és az általuk közbezárt szög alapján! **1032.** *Útmutatás*: az EF egyenes a paralelogrammát két egyenlő területű paralelogrammára bontja. **1033.** 7 cm. **1034.** Paralelogramma. $P = 2(d_1 + d_2)$. **1035.** 3 : 5. **1036.** Olyan paralelogramma, amelynek szögei egyenlők az adott paralelogramma szögeivel. **1037.** *Útmutatás*: rajzoljatok α szöget, a száraira mérjetek fel h_1 és h_2 hosszúságú szakaszokat! A magasságok talppontján keresztül húzzatok merőleges egyeneseket, majd a szög csúcsán keresztül a meghúzott egyenesekkel párhuzamos egyeneseket! **1038.** 72 cm.

1039. 17 cm és 19 cm. **1040.** 72°. **1041.** $\frac{a}{2}$. **1042.** *Útmutatás*: ha a rombusz tompaszögének csúcsából meghúzunk két magasságot, akkor a kapott derékszögű háromszögek egybevágók átfogójuk és hegyesszögük alapján. **1043.** 30°. **1044.** *Útmutatás*: a két háromszög kerületének meghatározásakor az átlót kétszer számoljuk, ezért a hossza 15 : 2 = 7,5 (cm). **1045.** *Útmutatás*: először olyan derékszögű háromszöget szerkesszetek, melynek egyik befogója h, átfogója $\frac{p}{2}$. **1046.** *Útmutatás*: szerkesszetek olyan egyenlő szárú háromszöget, melynek

alapja d és a rajta lévő szöge $\frac{\alpha}{2}$. **1047.** 5 cm. **1049.** 60°, 60°, 120°, 120°. **1053.** 1 : 1 : 1,62. **1054.** 5. **1056.** Igen. **1057.** *Útmutatás*: a négyzet oldalának a téglalap kisebbik oldalával kell egyenlő hosszúnak lennie. **1058.** Hasonló háromszögek: vagy 3, vagy 2, vagy 1. **1059.** Igen. **1060.** Igen, ha az adott háromszög szabályos. *Útmutatás*: fejezzétek ki a megszerkesztett háromszög szögeit az adott háromszög szögein keresztül. **1061.** 72 cm^2. **1062.** Igen. **1063.** *Útmutatás*: az $ABCD$ négyszög BD átlóján vegyetek fel egy K pontot úgy, hogy a BAC szög egyenlő legyen a KAD szöggel, és vizsgáljátok meg a kapott hasonló háromszögeket! **1064.** 8 cm. **1065.** 9,6 cm. **1066.** b) $CO^2 = a \cdot b - AO \cdot OB$, ahol CO az ABC háromszög szögfelezője. **1067.** $\frac{12\sqrt{2}}{7}$ cm. **1068.** *Útmutatás*: alkalmazzátok a derékszögű háromszögben az átfogóra húzott magasság tulajdonságát! **1069.** *Útmutatás*: alkalmazzatok pótszerkesztést! Rajzoljatok tetszőleges háromszöget két α és β szöge alapján! Határozzátok meg a kapott háromszög kerületét, a hasonlósági együtthatót, majd a hasonlósági együtthatót felhasználva szerkesszétek meg a keresett háromszöget! **1070.** *Útmutatás*: először húzzátok meg a hosszabb oldalra a magasságot, majd a háromszögek hasonlóságából fejezzétek ki a négyzet oldalát! **1072.** 105°, 120°, 135°, 105°, 120°, 135°. **1073.** 480 cm^2. **1074.** 90 cm^2. **1075.** 12 cm^2. **1076.** 3 cm. **1077.** $\frac{169}{18}$ cm. **1078.** 4 cm, 24 cm. **1079.** Igen. **1081.** 0,53; 0,84. **1082.** 1) 0,8; 2) $\frac{8}{17}$. **1083.** 1) $\sin\alpha = 0{,}28$, $\cos\alpha = 0{,}96$; 2) $\sin\alpha = \frac{11}{61}$, $\cos\alpha = \frac{60}{61}$; 3) $\sin\alpha = \frac{20}{29}$, $\cos\alpha = \frac{21}{29}$. **1084.** 0,28. **1085.** $2R\sin\frac{n^\circ}{2}$. **1086.** 1) $a \approx 8{,}64$, $b \approx 10{,}4$, $B\angle = 50°$; 2) $a \approx 0{,}21$, $b \approx 0{,}13$, $A\angle = 58°$; 3) $b \approx 20{,}04$, $c \approx 45{,}87$, $B\angle = 23°$; 4) $b \approx 13{,}54$, $c \approx 16{,}95$, $A\angle = 37°$; 5) $b \approx 10{,}54$, $A\angle = 58°13'$, $B\angle = 31°47'$; 6) $a \approx 96$, $c \approx 120{,}96$, $B\angle = 38°$; 7) $c \approx 18{,}46$, $A\angle = 43°27'$, $B\angle = 46°32'$; 8) $a \approx 8{,}94$, $A\angle = 47°56'$, $B\angle = 42°4'$. **1087.** 85,82 cm. **1088.** 29°, 61°. **1089.** 26,4 cm és 33 cm. **1090.** 73°44'.

MELLÉKLETEK

1. számú melléklet

Szögek szinusza és koszinusza

α	sin α cos β	cos α sin β	β
0°	0,000	1,000	90°
1°	0,017	1,000	89°
2°	0,035	0,999	88°
3°	0,052	0,999	87°
4°	0,070	0,998	86°
5°	0,087	0,996	85°
6°	0,105	0,995	84°
7°	0,122	0,993	83°
8°	0,139	0,990	82°
9°	0,156	0,988	81°
10°	0,174	0,985	80°
11°	0,191	0,982	79°
12°	0,208	0,978	78°
13°	0,225	0,974	77°
14°	0,242	0,970	76°
15°	0,259	0,966	75°
16°	0,276	0,961	74°
17°	0,292	0,956	73°
18°	0,309	0,951	72°
19°	0,326	0,946	71°
20°	0,342	0,940	70°
21°	0,358	0,934	69°
22°	0,375	0,927	68°
23°	0,391	0,921	67°
24°	0,407	0,914	66°
25°	0,423	0,906	65°
26°	0,438	0,899	64°
27°	0,454	0,891	63°
28°	0,469	0,883	62°
29°	0,485	0,875	61°
30°	0,500	0,866	60°
31°	0,515	0,857	59°
32°	0,530	0,848	58°
33°	0,545	0,839	57°
34°	0,559	0,829	56°
35°	0,574	0,819	55°
36°	0,588	0,809	54°
37°	0,602	0,799	53°
38°	0,616	0,788	52°
39°	0,629	0,777	51°
40°	0,643	0,766	50°
41°	0,656	0,755	49°
42°	0,669	0,743	48°
43°	0,682	0,731	47°
44°	0,695	0,719	46°
45°	0,707	0,707	45°

2. számú melléklet

Szögek tangense

α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,062	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	67°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

3. számú melléklet

A természetes számok négyzetei 10-től 99-ig

Tízesek	Egyesek									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Alakzat
– egyszerű 128
– nem egyszerű 128
– egybevágó 143
– egyenlő területű 143

Átló
– sokszögé 127
– négyszögé 8

Deltoid 40
Derékszögű háromszög
– megoldása 193
– hegyesszögének koszinusza 174
– szinusza 174
– tangense 174
– oldalai és szögei közötti összefüggés 180

Ferde 165
– talppontja 165
– vetülete 165
Feltétel
– elégséges 24
– szükséges 24

Húr 61
Hasonlósági együttható 81

Ismertetőjel
– érintőnégyszögé 70
– háromszögek hasonlósága
– – három oldal alapján 104
– – két oldala alapján 96
– – két oldal és közbezárt szög alapján 103
– húrnégyszögé 70
– rombuszé 38
– paralelogrammáé 22, 23
– téglalapé 31

Koszinusz 174
Körvonal
– húrja 61
Középvonal
– háromszögé 46
– trapézé 53
Külső szög
– sokszögé 127
– négyszögé 10

Negyedik arányos szakasz 90
n-szög 126
Négyszög 8
– adatai 8
– érintő, körülírt 69
– csúcsai 8
– – szemben fekvő 8
– – szomszédos 8
– kerülete 9
– húr, beírt 69
– konkáv 9
– konvex 9
– oldalai 8
– – szomszédos 8
– – szemben fekvő 8
– szögei 8
– – belső 10
– – szomszédos 8
– – szemben fekvő 8
Négyzet 38

Magasság
– trapézé 52
– paralelogrammáé 15
Mértani középarányos
– két szakaszé 111

Paralelogramma 15
Pitagorasz tétel 164

Rombusz 37

Sokszög 126
– átlói 127
– kerülete 126
– körvonalba írt 127
– konkáv, homorú 127
– körvonal köré írt 127
– konvex, domború 126
– oldalai 126
– szögei 126

Szinusz 174
Szög
– kerületi 62
– középponti 61
– adott ívre támaszkodó, adott ívhez tartozó 62

Thalész tétele 45
Trapéz
– egyenlő szárú 53
– derékszögű 53
– szárai 52

Terület 132, 133
– képletek 133, 144
– – háromszögé 148
– – paralelogrammáé 141
– – téglalapé 134
– – trapézé 155
Tétel
– arányos szakaszokról 88
– kerületi szögről 62
– mértani középről a derékszögű háromszögben 111
– négyszög belső szögeinek összegéről 9
– *n*-szög belső szögeinek összegéről 127
Téglalap 30

Vetület
–a befogók vetülete az átfogóra 111, 112

Навчальне видання

БУРДА Михайло Іванович
ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів
із навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української

Перекладачі:
Олександр Павлович Генці,
Юдіт Імріївна Кулін

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Коректор *І. О. Петро*

Малюнки художників *Е. Авраменка, О. Дядика*
Фото: *Е. Авраменко, А. Віксенко, Е. Золотарьова, О. Гордієвич*

При оформленні обкладинки використано фотоілюстрації з видань:
Образотворче мистецтво. – 2(58), 2006; Донбасс. Первый среди равных. – Донецк: ООО „Кардинал"; Донбасс. Взгляд в будущее. – Донецк, 1999; Київський альбом. – ТОВ „Видавничий дім „Перископ"; Київ у барвах осені. – К.: Мистецтво, 1992.

Підп. до друку 31.10.2008. Формат 70×100/16.
Папір офс. Гарнітура Таймс. Друк офс. Умов. друк. арк. 19,5 + 0,33 форзац.
Обл.-вид. арк. 19,8 + 0,4 форзац. Наклад 2260 пр. Вид № 30. Зам. № 142П.

Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ"
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2980 від 19.09.2007
www.dsv-svit.lviv.ua
e-mail: office@dsv-svit.lviv.ua

Друк ВАТ „Патент"
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
e-mail: patent@uzh.ukrtel.net